Prof. Dr. Leif Kobbelt
Thomas Ströder, Fabian Emmes
Sven Middelberg, Michael Kremer

Informatik 8
RWTH Aachen

Datenstrukturen und Algorithmen (SS 2013)

Übungsblatt 8

Abgabe: Montag, **24.06.2013**, 14:00 Uhr

- Die Übungen sollen in Gruppen von zwei bis drei Personen bearbeitet werden.
- Schreiben Sie die Namen jedes Gruppenmitglieds sowie alle Matrikelnummern auf die abgegebenen Lösungen.
- Schreiben Sie die Namen jedes Gruppenmitglieds sowie alle Matrikelnummern auch in die Quellcode-Dateien.
- Geben Sie Ihre Lösungen am **Anfang** der Globalübung, montags, 14:00 Uhr, ab.
- Schicken Sie den jeweiligen Quellcode bitte per **E-Mail** direkt an Ihre/n Tutor/in.
- Geben Sie außerdem den ausgedruckten Quellcode zusammen mit den schriftlichen Lösungen ab.
- Zu spät abgegebene Lösungen werden nicht bewertet.
- Sofern nicht anders gefordert, müssen alle Lösungen und Zwischenschritte kommentiert werden.

Aufgabe 1 (*AVL-Bäume* **[10 Punkte]**)

Der Balancegrad $balance(v)$ eines Knotens im Suchbaums v entspricht der Höhendifferenz seiner beiden Teilbäume w_1 und w_2:

$$balance(v) = height(subtree(w_1)) – height(subtree(w_2)).$$

In einem AVL-Baum wird ein Knoten v als kritisch bezeichnet, wenn er unbalanciert ist, d.h. sobald $balance(v) \notin \{-1, 0, 1\}$. Immer wenn ein solcher Zustand erreicht worden ist, muss der kritische Knoten rotiert werden, um die Balanceeigenschaft wieder herzustellen.

(a) Geben sie alle möglichen unkritischen AVL-Bäume für folgende Knoten an [2 Punkte]:

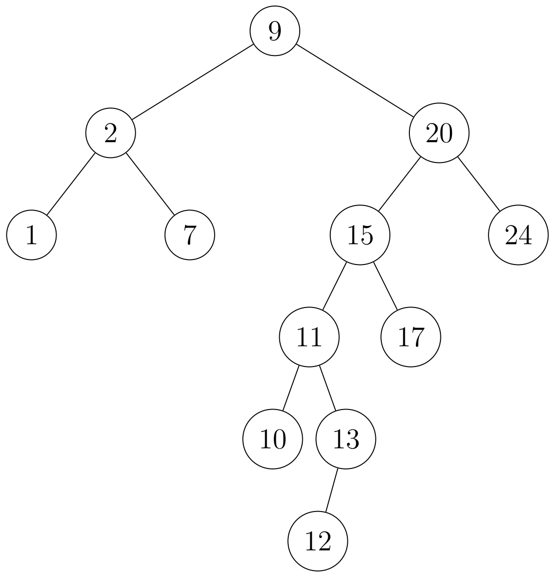
$$4, 5, 7, 9, 11$$

(b) Fügen Sie in einen leeren AVL-Baum die folgenden Zahlen in der gegebenen Reihenfolge ein:

$$5, 9, 23, 21, 10, 12, 19$$

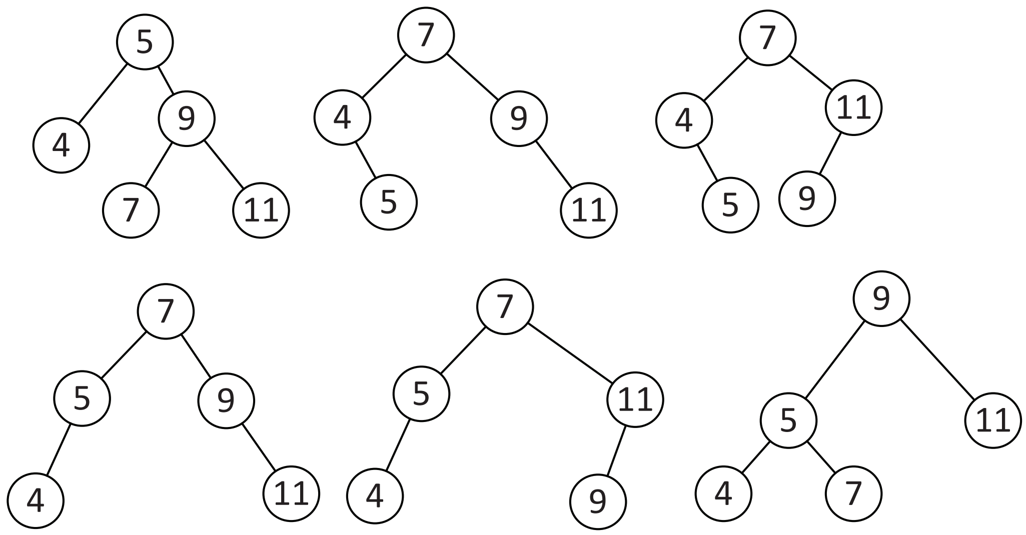
Zeichnen Sie den AVL-Baum jeweils vor und nach jeder Rotation. Markieren Sie zusätzlich vor der Rotation den kritischen Knoten, sowie den zuletzt eingefügten Knoten. Geben Sie bei Doppelrotationen auch den Zwischenzustand des Baumes an. [4 Punkte]

(c) Geben Sie **maximal vier Rotationen** an, die den folgenden Baum der **Höhe fünf** in einen Baum der **Höhe drei** transformieren. Geben Sie auch den Zustand des Baumes nach jeder Rotation an. [4 Punkte]

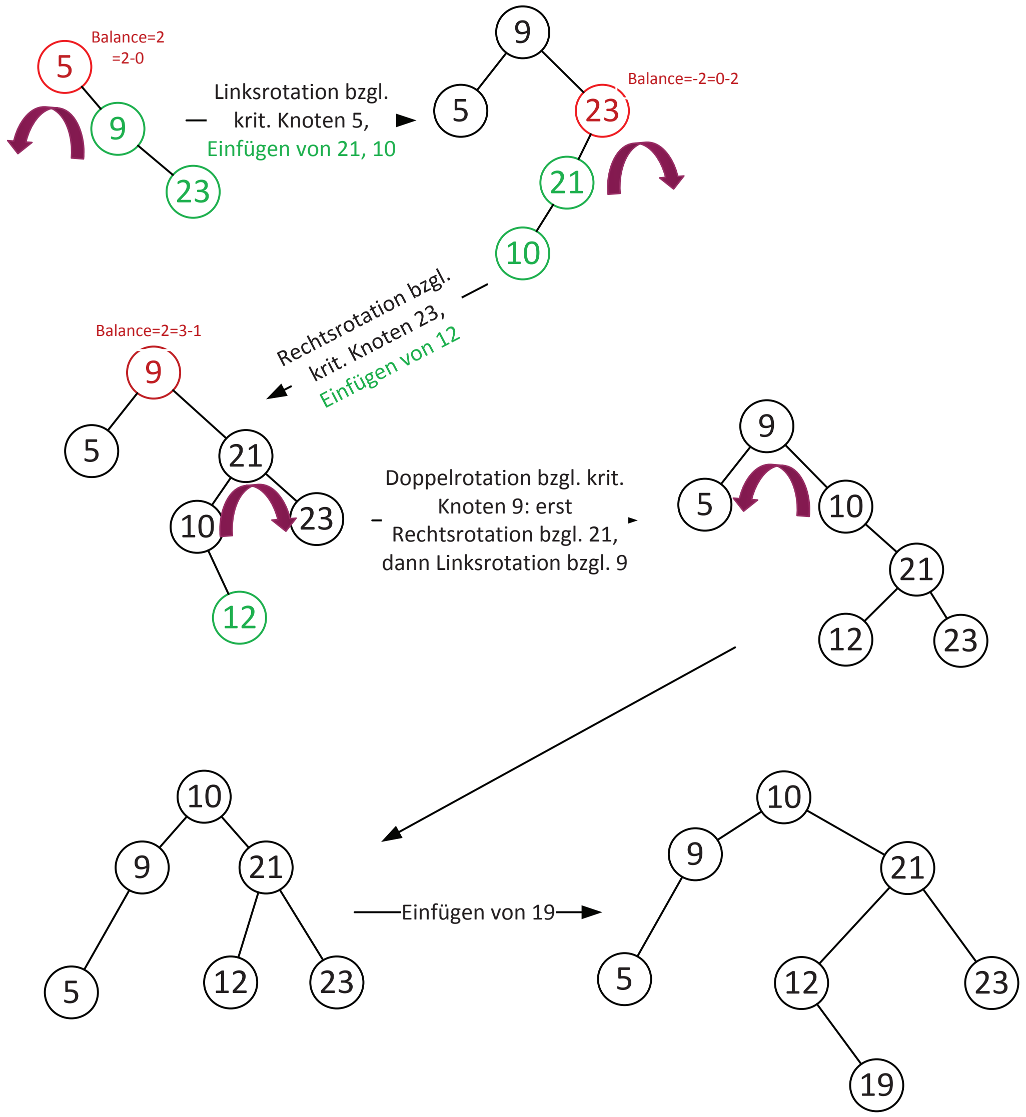


Lösungsvorschlag

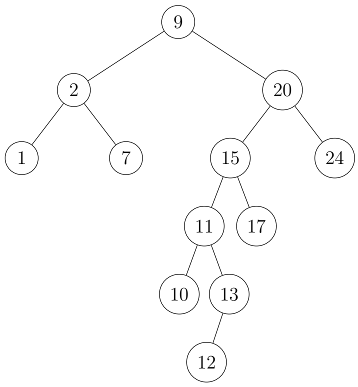
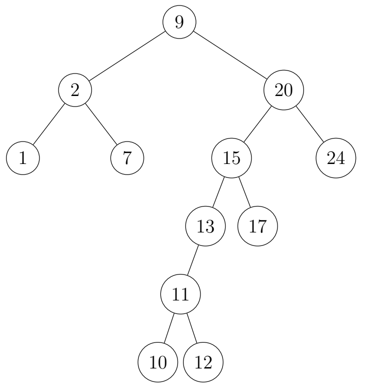
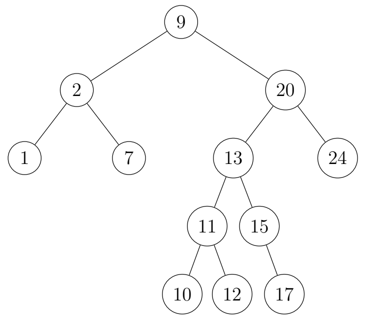
(a)



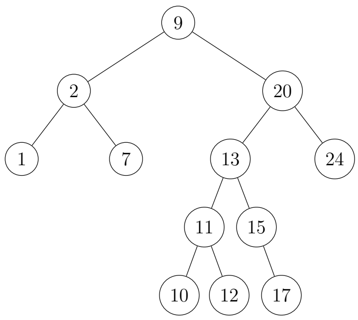
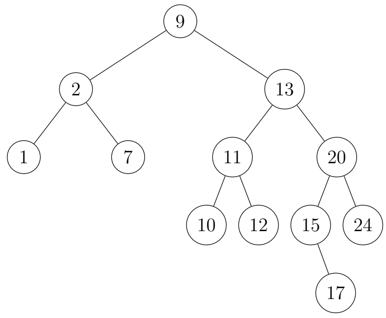
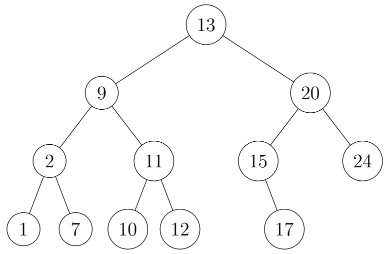
(b)



(c) Wir können den gegebenen Baum mit vier Rotationen in einen Baum der Höhe drei transformieren. Hierzu führen wir zuerst eine Linksrotation auf den Knoten 11 aus und anschließend eine Rechtsrotation auf den Knoten 15. Durch diese beiden Rotationen erhalten wir einen Baum der Höhe vier:

Ursprünglicher Baum:	Linksrotation auf Knoten 11:	Rechtsrotation auf Knoten 15
		

Auf diesen Baum führen wir nun noch eine Rechtsrotation auf den Knoten 20 durch, gefolgt von einer Linksrotation um die Wurzel und erhalten so einen Baum der Höhe drei:

Baum der Höhe vier:	Rechtsrotation auf Knoten 20:	Linksrotation auf Wurzel:
		

Aufgabe 2 (*Rot-Schwarz-Bäume* **[10 Punkte]**)

(a) Fügen Sie die folgenden Werte in der angegebenen Reihenfolge in einen anfangs leeren Rot-Schwarz-Baum ein. Geben Sie den entstandenen Rot-Schwarz-Baum nach jeder Knotenerzeugung, Umfärbung und Rotation an (mehrere Umfärbungen innerhalb eines Falles dürfen in einem Schritt vorgenommen werden). [3 Punkte]

$$42, 13, 17, 23, 31, 69, 77$$

(b) Löschen Sie nun aus dem in Aufgabenteil a) entstandenen Rot-Schwarz-Baum die folgenden Werte in der angegebenen Reihenfolge. Geben Sie den entstandenen Rot-Schwarz-Baum nach jeder Knotenlöschung, Markierungsverschiebung, Umfärbung und Rotation an (mehrere Umfärbungen innerhalb eines Falles dürfen in einem Schritt vorgenommen werden). [3 Punkte]

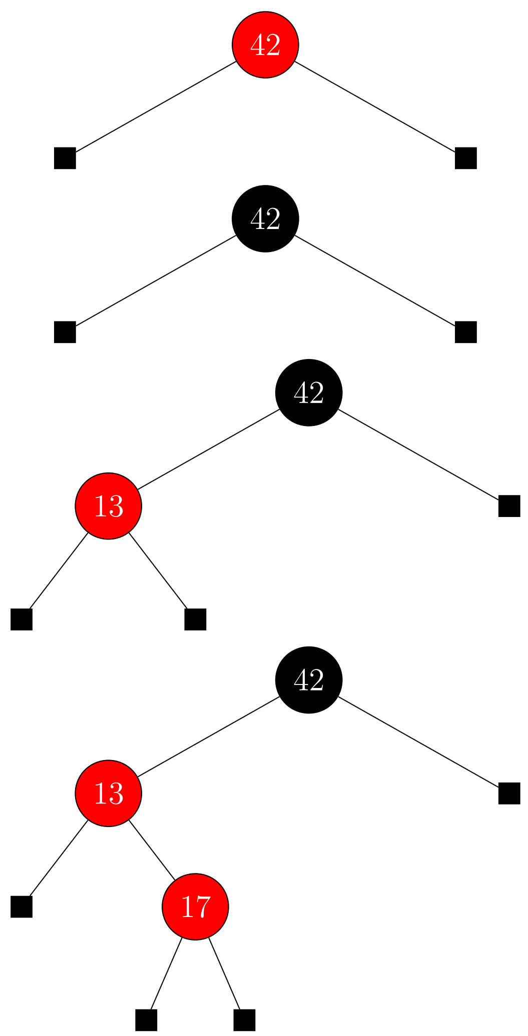
$$13, 31, 42, 69$$

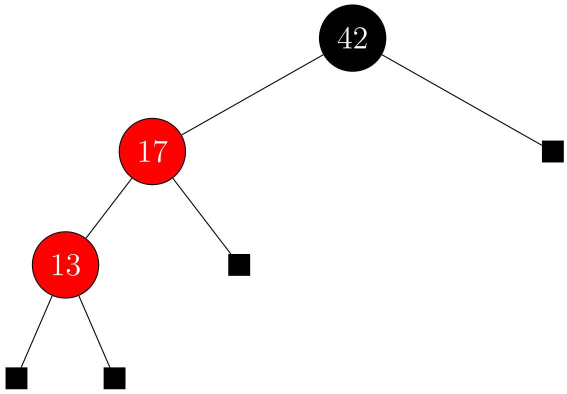
(c) Zeigen Sie, dass zu jeder Höhe h ein Rot-Schwarz-Baum $B(h)$ existiert mit der folgenden Anzahl roter Knoten $r(B(h))$ [4 Punkte]:

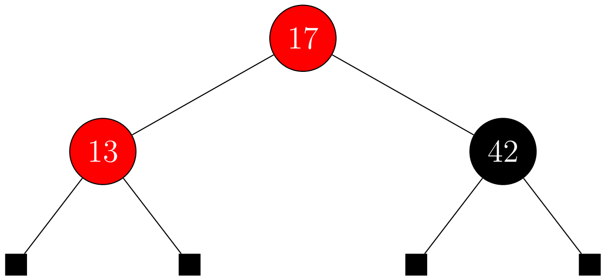
$$r(B(h)) = \sum_{i=2}^{h} \left((1 + (-1)^{i-h}) \cdot 2^{i-2} \right)$$

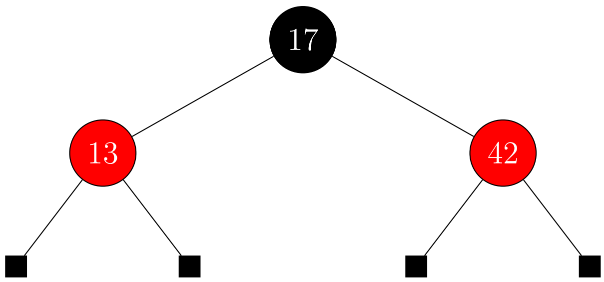
Lösungsvorschlag

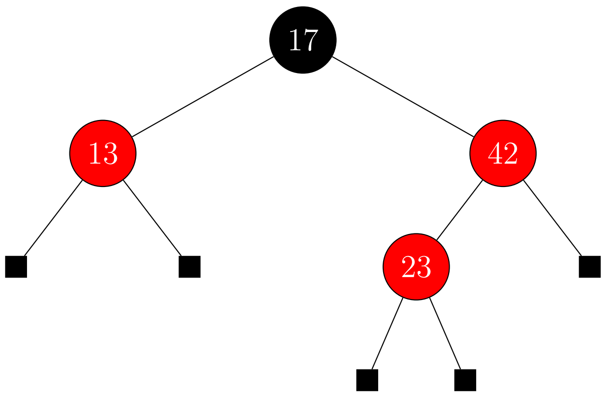
(a)

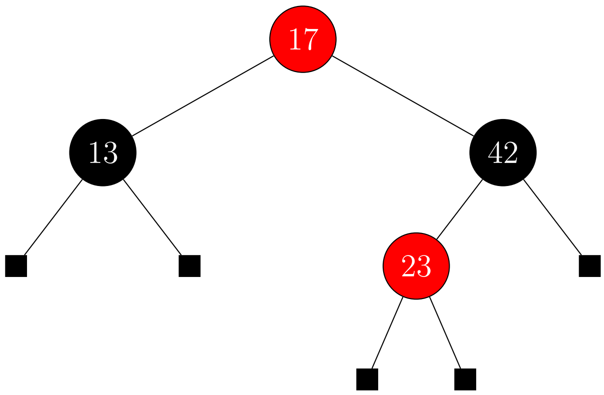


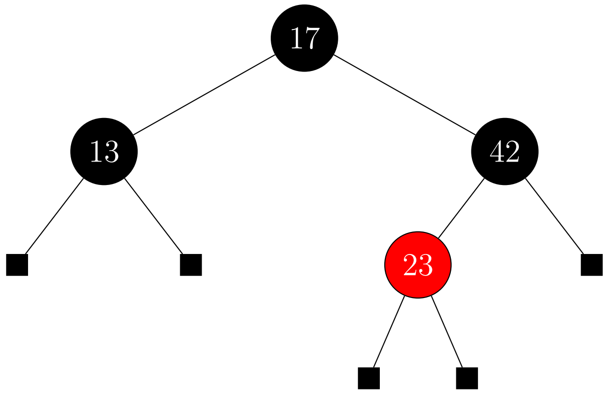

42
17
13

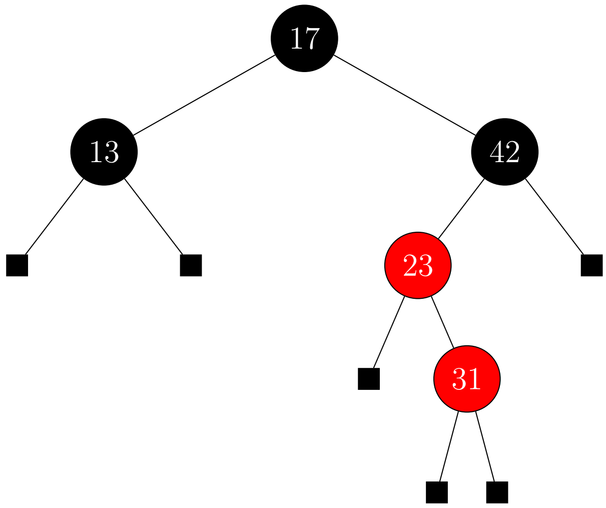

17
13
42

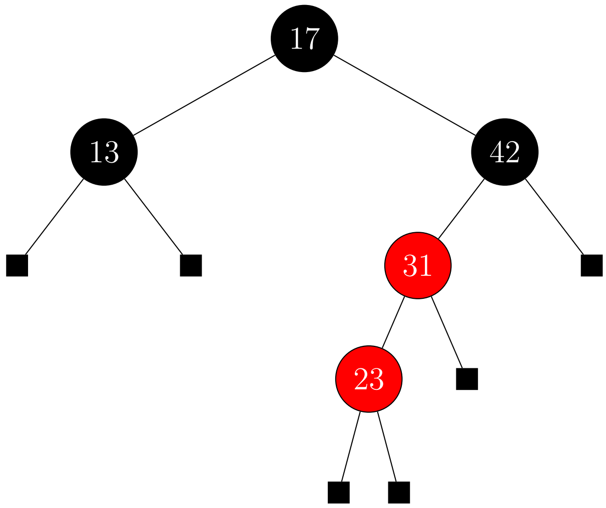

17
13
42

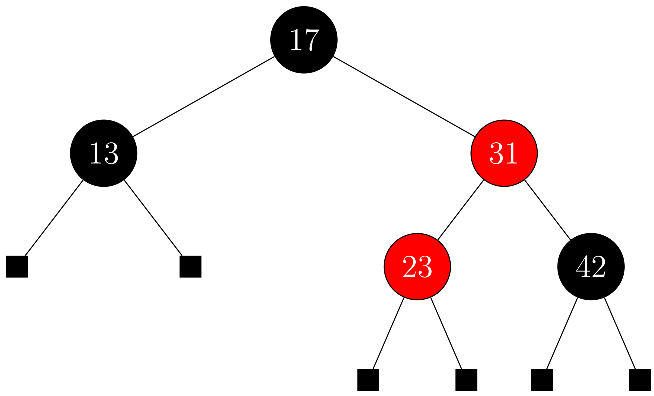

17
13
42
23

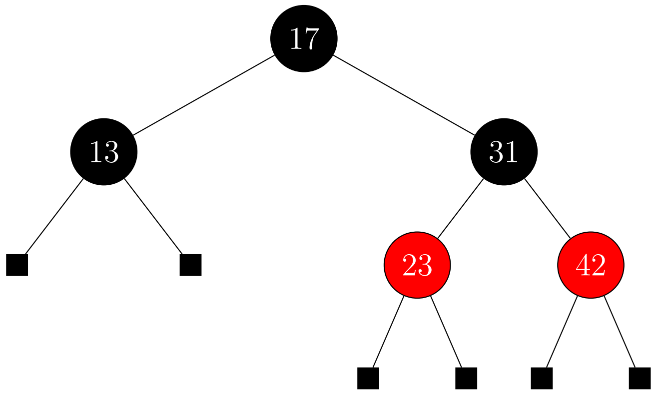

17
13
42
23

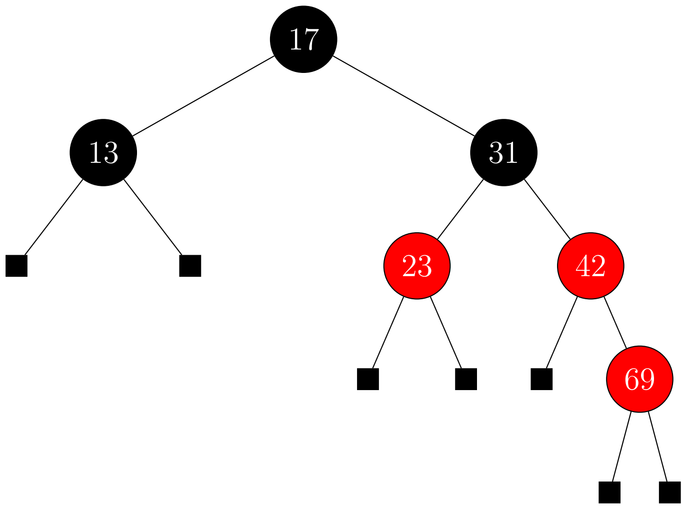

17
13
42
23

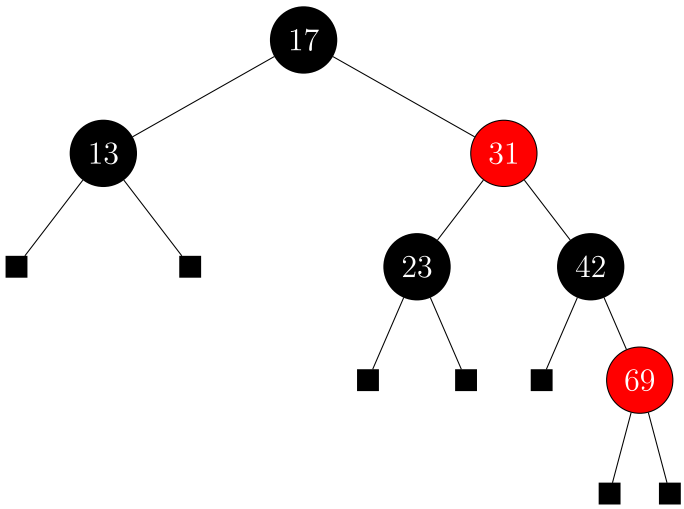

17
13
42
23
31

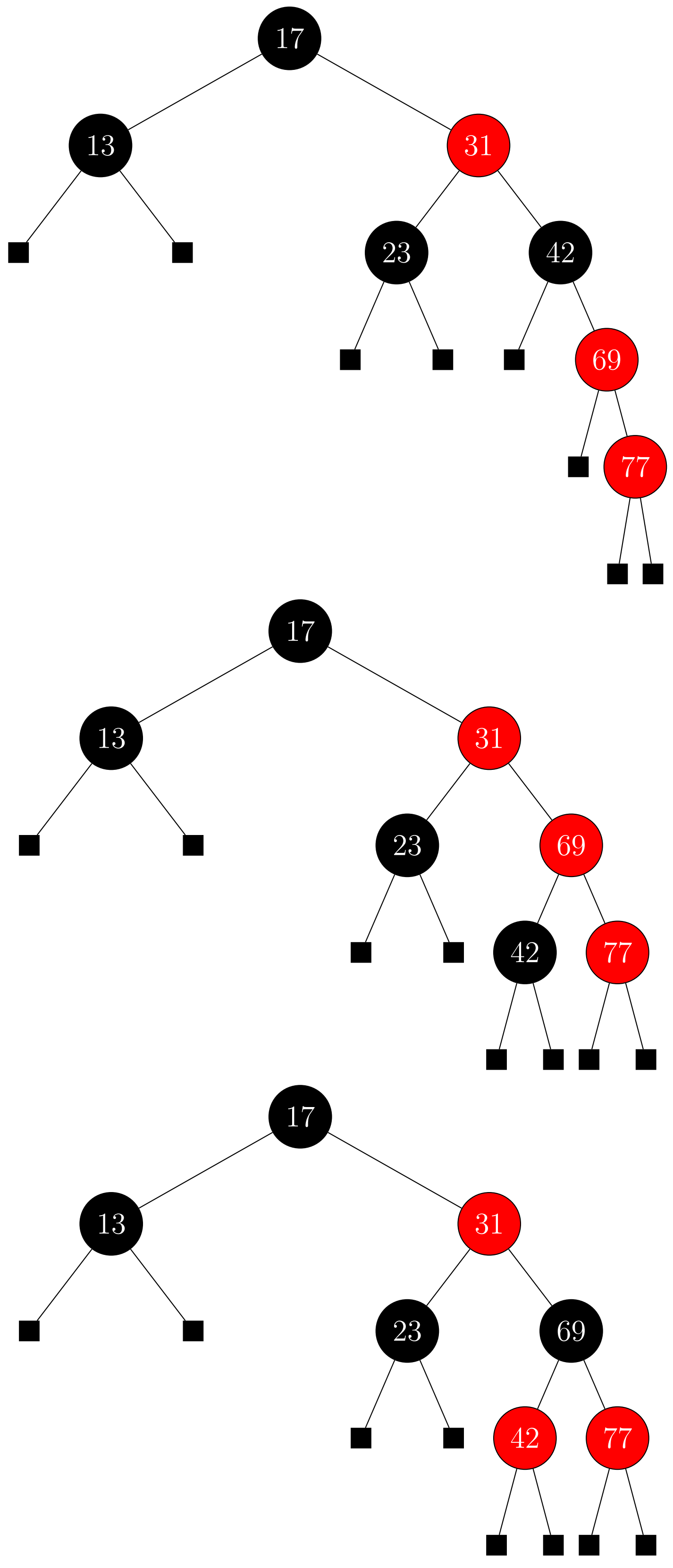

17
13
42
31
23


17
13
31
23
42

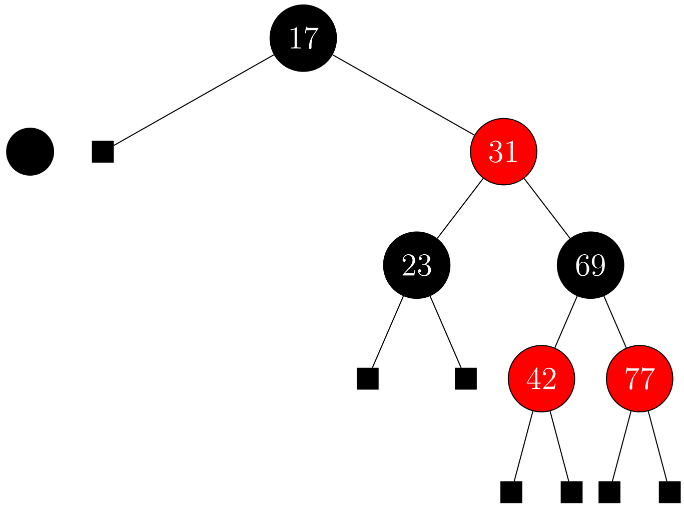

17
13
31
23
42

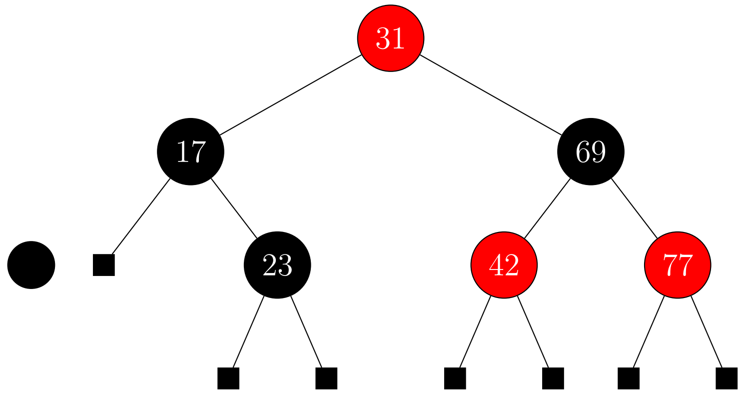

17
13
31
23
42
69

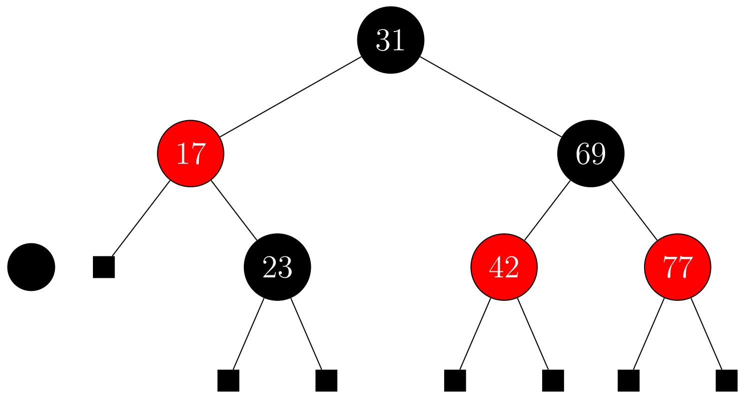

17
13
31
23
42
69

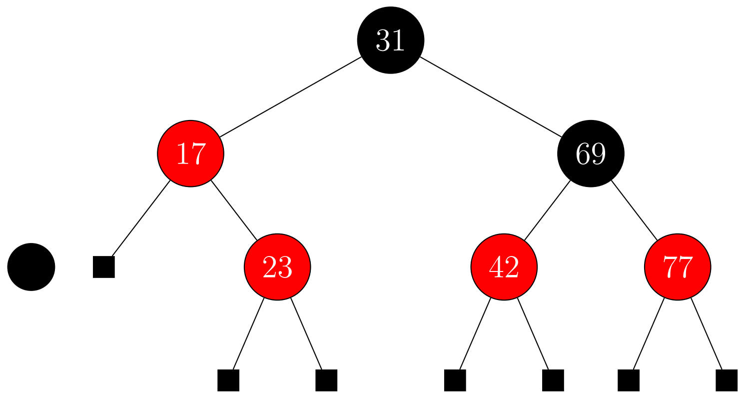


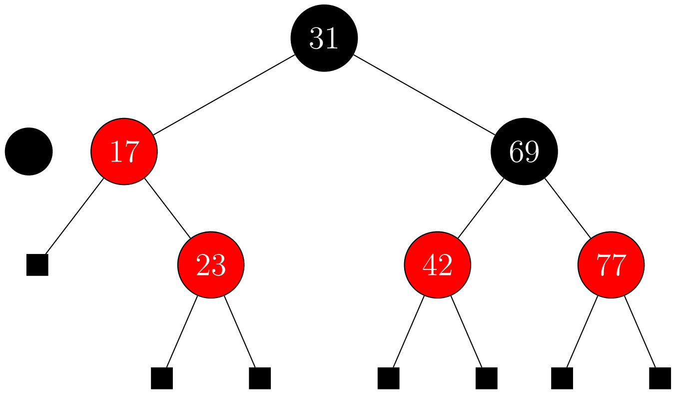
(b)

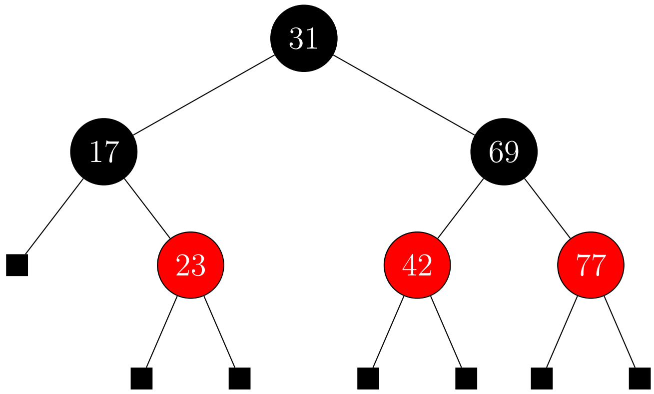

17
31
23
69
42
77

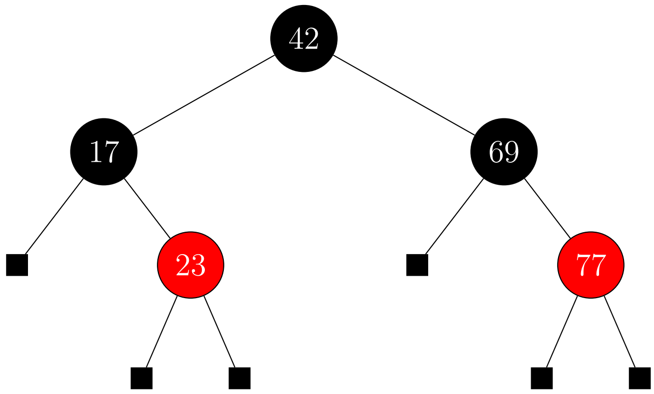

31
17
69
23
42
77

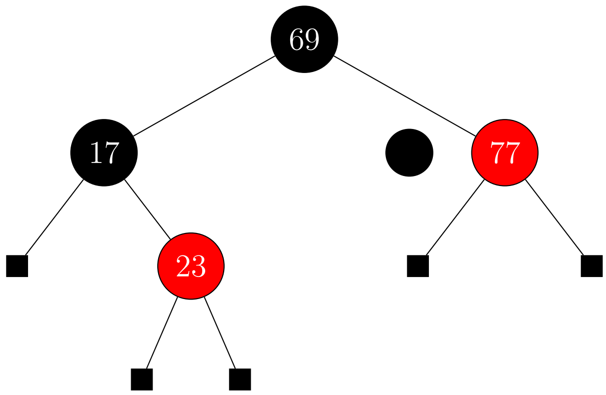

31
17
69
23
42
77

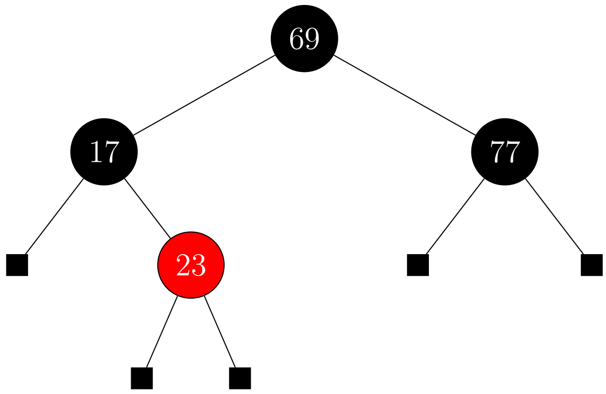

31
17
69
23
42
77

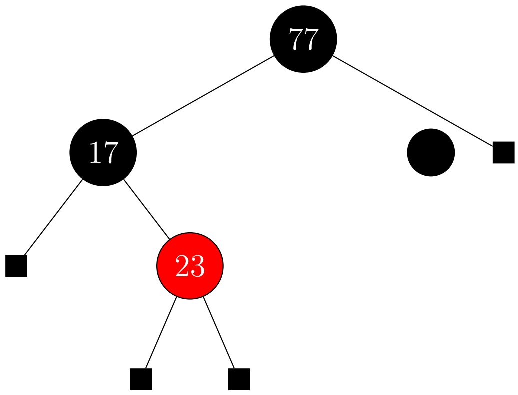

31
17
69
23
42
77

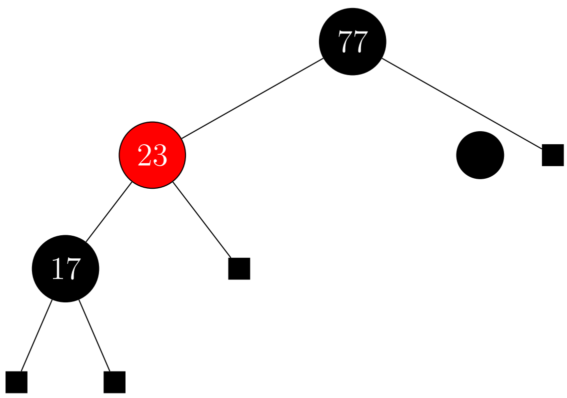

31
17
69
23
42
77

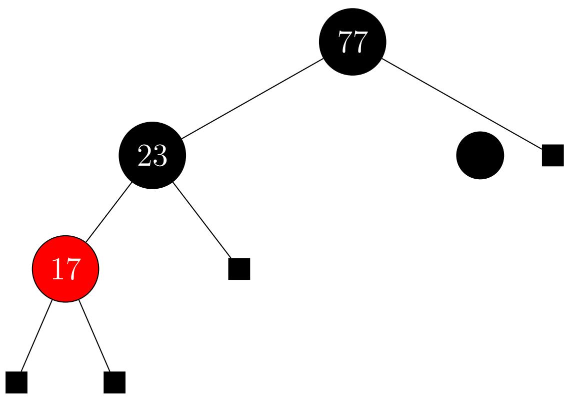

42
17
69
23
77

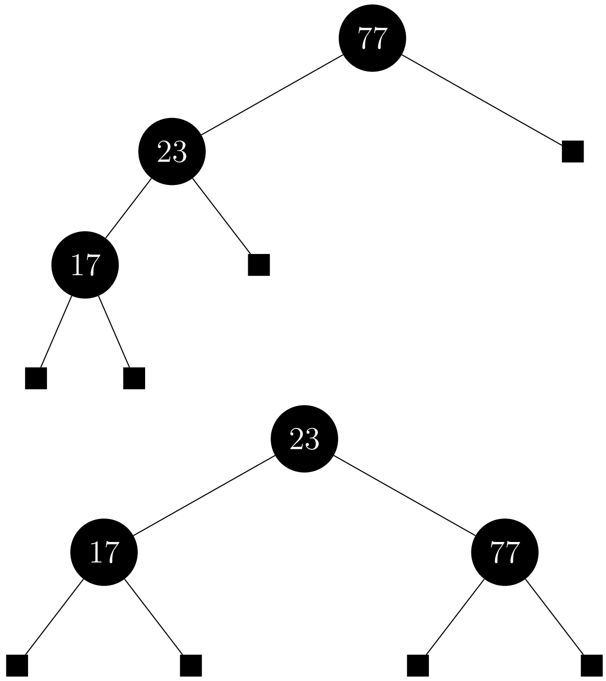

69
17
77
23


69
17
77
23


77
17
23


77
23
17


77
23
17



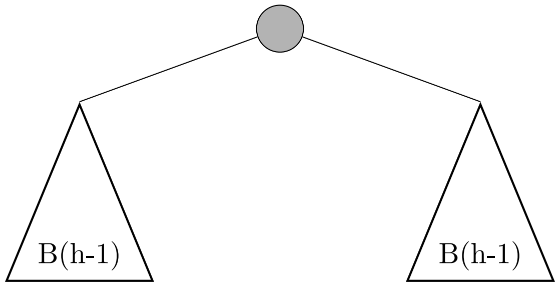
(c) Wir konstruieren einen entsprechenden Baum mit Höhe h induktiv und zeigen, dass die Eigenschaft für jede Höhe erfüllt ist:

Induktionsanfang:
Alle Bäume mit Höhe $h < 2$ bestehen nur aus Wurzel und Blättern. Nach Definition besitzen sie somit nur schwarze Knoten. Der Summenindex i startet bei 2 und läuft bis h. Somit ergibt sich bei allen Höhen $h < 2$ die Summe 0 und die Aussage ist für $h < 2$ gezeigt.

Induktionshypothese:
Die Aussage gelte für alle Höhen h' mit $0 \leq h' < h$, wobei h beliebig, aber fest ist.

Induktionsschritt:
Wir unterscheiden zwischen gerader und ungerader Höhe h:

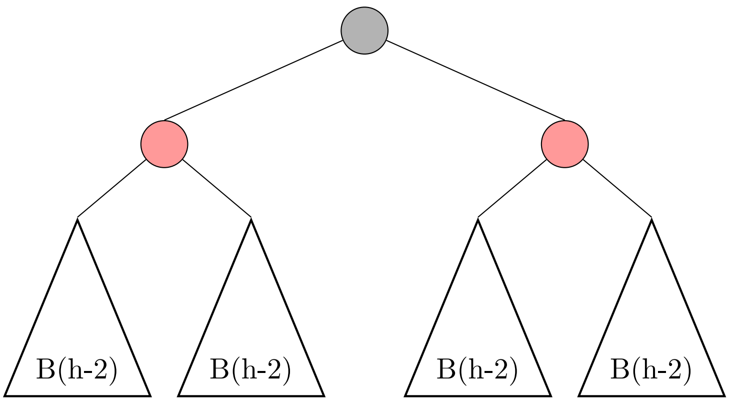
1. Fall: h ist ungerade.
Konstruiere $B(h)$ wie folgt:



Für den so konstruierten Baum $B(h)$ gilt für die Anzahl der roten Knoten $r(B(h))$:

$$
\begin{aligned}
r(B(h)) &= 2 \cdot r(B(h-1)) && |\text{Induktionshypothese} \\
&= 2 \cdot \sum_{i=2}^{h-1} \left((1 + (-1)^{i-(h-1)}) \cdot 2^{i-2}\right) \\
&= \sum_{i=2}^{h-1} \left((1 + (-1)^{i-h+1}) \cdot 2^{i-1}\right) && |\text{Indexverschiebung} \\
&= \sum_{i=3}^{h} \left((1 + (-1)^{i-h}) \cdot 2^{i-2}\right) && |h \text{ ungerade } \Rightarrow (1 + (-1)^{2-h}) = 0 \\
&= \sum_{i=2}^{h} \left((1 + (-1)^{i-h}) \cdot 2^{i-2}\right)
\end{aligned}
$$

2. Fall: h ist gerade.
Konstruiere $B(h)$ wie folgt:



Für den so konstruierten Baum $B(h)$ gilt für die Anzahl der roten Knoten $r(B(h))$:

$$
\begin{aligned}
r(B(h)) \quad &= 2 + 4 \cdot r(B(h-2)) && |\text{Induktionshypothese} \\
&= 2 + 4 \cdot \sum_{i=2}^{h-2} \left((1 + (-1)^{i-(h-2)}) \cdot 2^{i-2}\right) \\
&= 2 + \sum_{i=2}^{h-2} \left((1 + (-1)^{i-h+2}) \cdot 2^{i}\right) && |\text{Indexverschiebung} \\
&= 2 + \sum_{i=4}^{h} \left((1 + (-1)^{i-h}) \cdot 2^{i-2}\right) && |h \text{ gerade } \Rightarrow \\
& && (1 + (-1)^{3-h}) = 0 \wedge \\
& && (1 + (-1)^{2-h}) = 2 \\
&= 2 + \sum_{i=2}^{h} \left((1 + (-1)^{i-h}) \cdot 2^{i-2}\right) - 2 \cdot 2^{2-2} \\
&= \sum_{i=2}^{h} \left((1 + (-1)^{i-h}) \cdot 2^{i-2}\right)
\end{aligned}
$$