2.7 Geometrische Algorithmen

2.7.1 Inside-Test

2.7.2 Konvexe Hülle

2.7.3 Nachbarschaften

2.7.4 Schnittprobleme

2.7 Geometrische Algorithmen

2.7.1 Inside-Test

2.7.2 Konvexe Hülle

2.7.3 Nachbarschaften

2.7.4 Schnittprobleme

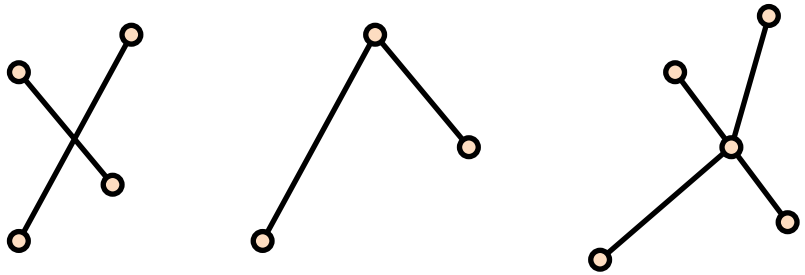
2.7.4.1 Schnitt von Liniensegmenten

2.7.4.2 Repräsentation von planaren Unterteilungen

2.7.4.3 Überlagerung von Unterteilungen

Schnitt von Liniensegmenten

- Problemstellung
  - Gegeben: Eine Menge S von n abgeschlossenen Liniensegmenten in der Ebene
  - Gesucht: Die Schnittpunkte der Segmente

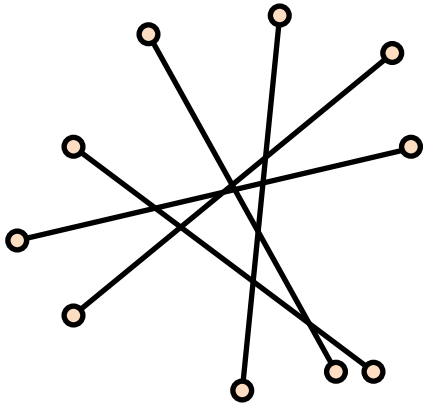


abgeschlossene Segmente → die Endpunkte gehören dazu!

Komplexität

- Brute-Force
  Teste alle Paare von Segmenten → $O(n^2)$
- Dies ist im Worst-case zwar optimal …

n^2 Schnittpunkte!

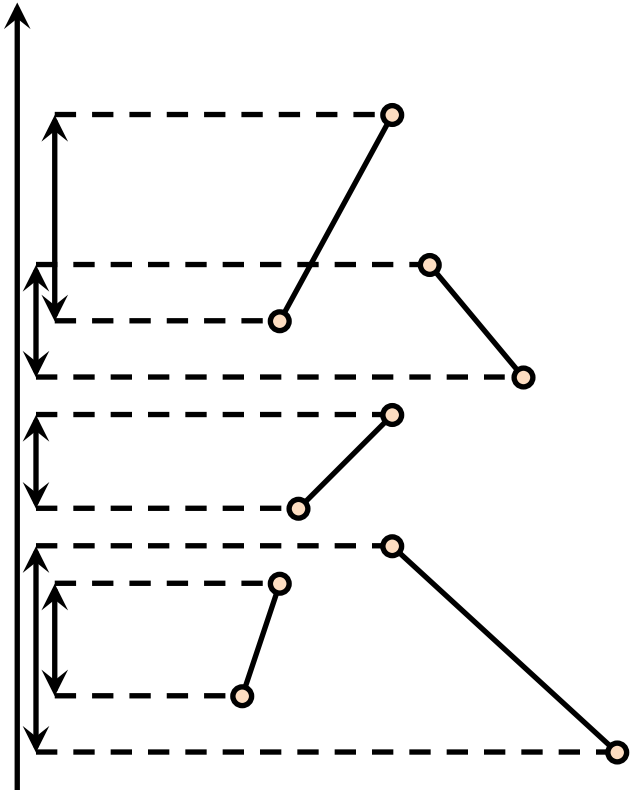


- … aber wir hätten lieber einen “output-sensitiven” Algorithmus

Schnitt von Liniensegmenten

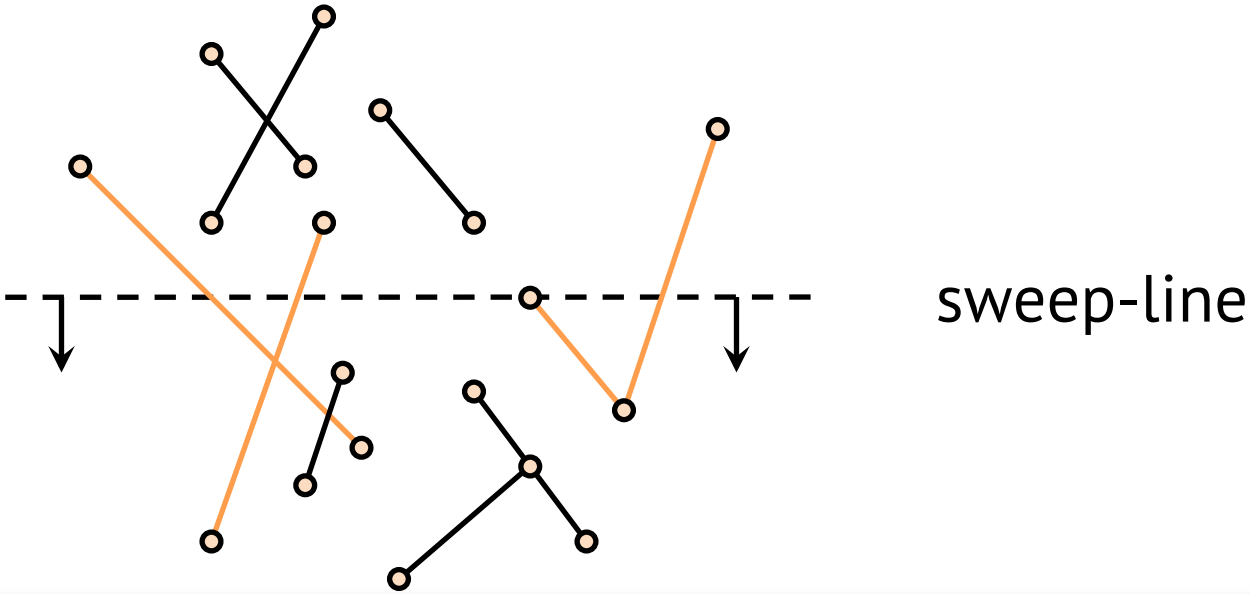
- Idee: Vermeide den Test von Segment-Paaren, die weit voneinander entfernt sind.

Teste nur Segmente, deren y-Intervalle überlappen!



Schnitt von Liniensegmenten

- Teste nur die Paare, die von einer horizontalen Sweep-Line L geschnitten werden
- Status von L = Menge der von L geschnittenen Segmente
- Events = Endpunkte aller Segmente

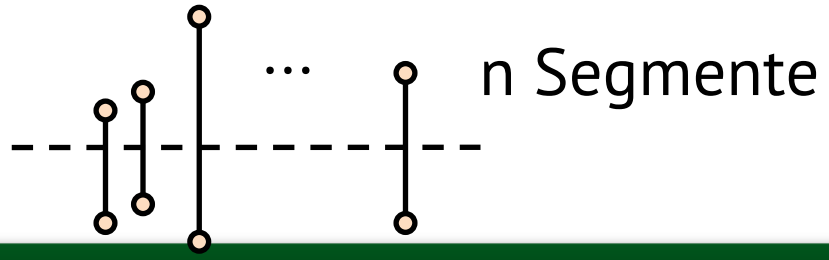


Schnitt von Liniensegmenten

- Ist das Event der obere Endpunkt eines Segments, so wird das Segment gegen alle Segmente im Status getestet und dann dem Status hinzugefügt.
- Ist das Event der untere Endpunkt eines Segments, so wird es aus dem Status entfernt.

➡Es werden nur Paare getestet, die von einer horizontalen Linie geschnitten werden.

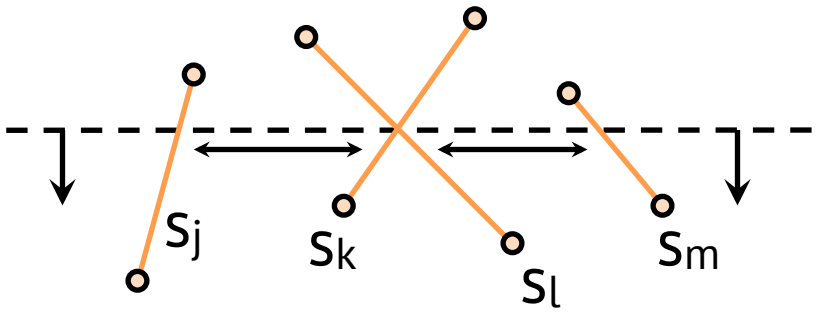
- Leider ist dieser Algorithmus immer noch nicht output-sensitiv.



Schnitt von Liniensegmenten

- Verfeinerung:
  - Ordne die Segmente im Status von links nach rechts
  - Status ändert sich nun auch an Schnittpunkten → Schnittpunkte sind auch Events
  - Teste bei Status-Änderung (Einfügen, Ausfügen oder Swap) nur noch gegen die Nachbarsegmente

neue Nachbarn



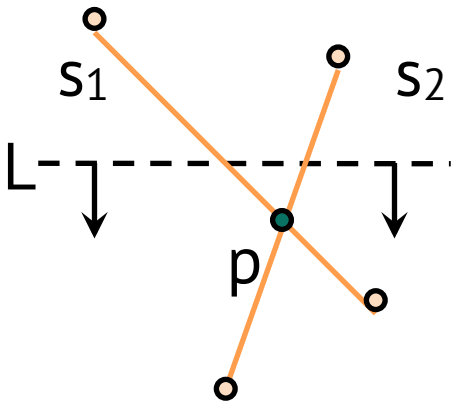
Schnitt von Liniensegmenten

- Verfeinerung:
  - Ordne die Segmente im Status von links nach rechts
  - Status ändert sich nun auch an Schnittpunkten → Schnittpunkte sind auch Events
  - Teste bei Status-Änderung (Einfügen oder Swap) nur noch gegen die Nachbarsegmente

    Finden wir immer noch alle Schnittpunkte?

Schnitt von Liniensegmenten

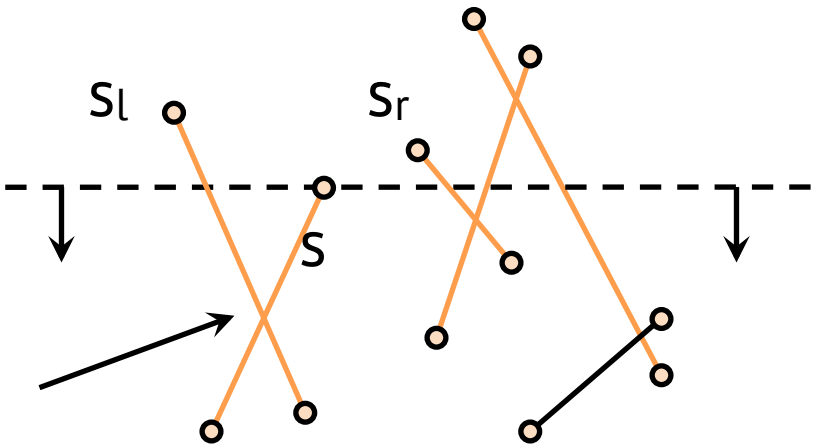
- Lemma
  Es seien s_1 und s_2 zwei nicht-horizontale Segmente, die sich in einem inneren Punkt p schneiden und es gebe kein weiteres Segment durch diesen Punkt. Dann gibt es ein Event über p, wo s_1 und s_2 Nachbarn werden und auf Schnitt getestet werden.



Es sei L eine horizontale Linie über p, so dass kein Event zwischen L und p liegt → s_1 und s_2 sind benachbart. Zu Beginn des Algorithmus waren sie aber nicht benachbart, also gibt es ein Event q bei dem s_1 und s_2 Nachbarn wurden und auf Schnitt getestet wurden.

Ablauf (grob)

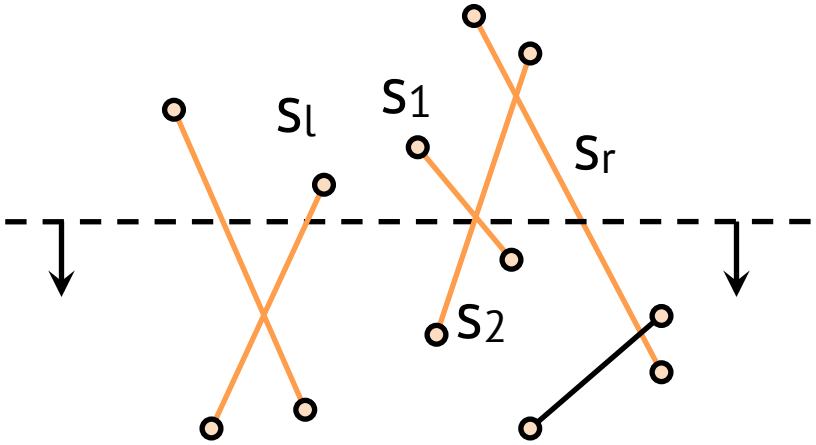
- Eine Horizontale Sweep Line L wird von oben nach unten über die Ebene bewegt, Halt an Events
- Event: Oberer Endpunkt eines Segments s
  ➞Das Segment s muss gegen seine zwei Nachbarn s_l und s_r getestet werden. Nur Schnittpunkte unterhalb von L sind von Interesse.



Schnittpunkt gefunden

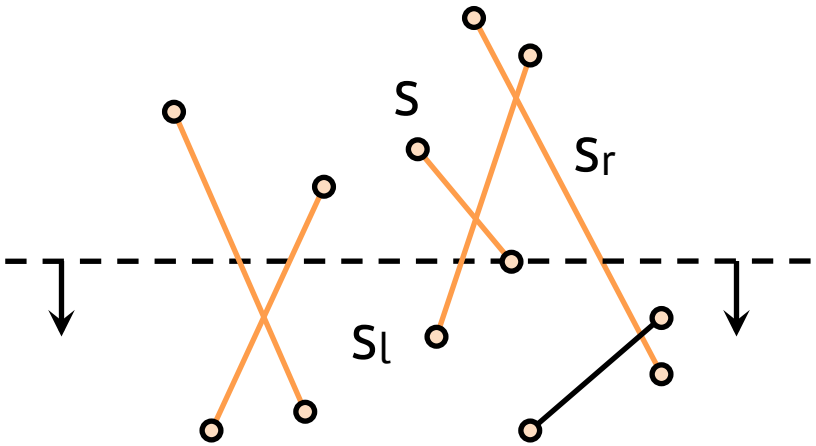
Ablauf (grob)

- Eine Horizontale Sweep Line L wird von oben nach unten über die Ebene bewegt, Halt an Events
- Event: Schnittpunkt zwischen Segmenten s_1 und s_2
  ➞Die Reihenfolge von s_1 und s_2 wird getauscht und die Segmente jeweils gegen (höchstens) einen neuen Nachbarn getestet.



Ablauf (grob)

- Eine Horizontale Sweep Line L wird von oben nach unten über die Ebene bewegt, Halt an Events
- Event: Unterer Endpunkt eines Segments s
  ➞ Die Nachbarn von s werden Nachbarn und müssen auf Schnitt getestet werden.

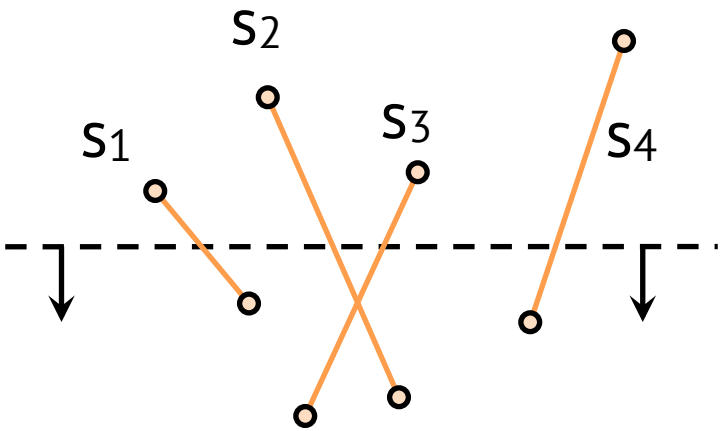


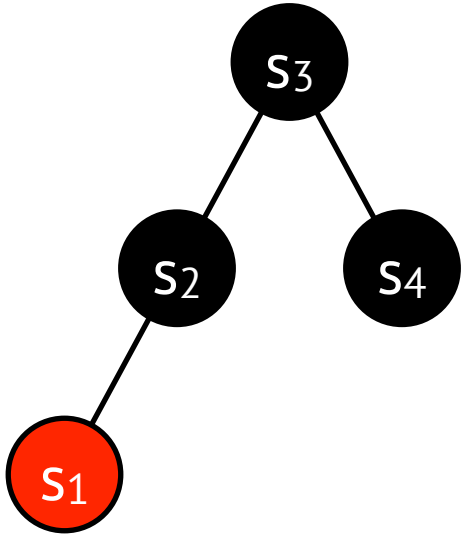
Details

- Event-Schlange Q als balancierter binärer Suchbaum
  - Ordnung:
    $p < q \Leftrightarrow p_y < q_y$ oder ($p_y = q_y$ und $p_x < q_x$)
    Insbesondere wird der linke Endpunkt eines horizontalen Segments zuerst abgearbeitet
  - Operationen
    - Liefere nächstes Event
    - Prüfe, ob Event enthalten ist
    - …

Datenstrukturen

- Status T als balancierter binärer Suchbaum
  - Segmente sind entlang der Sweep-Line L geordnet
  - Operationen: Finde Segment links/auf/ rechts von einem Punkt q

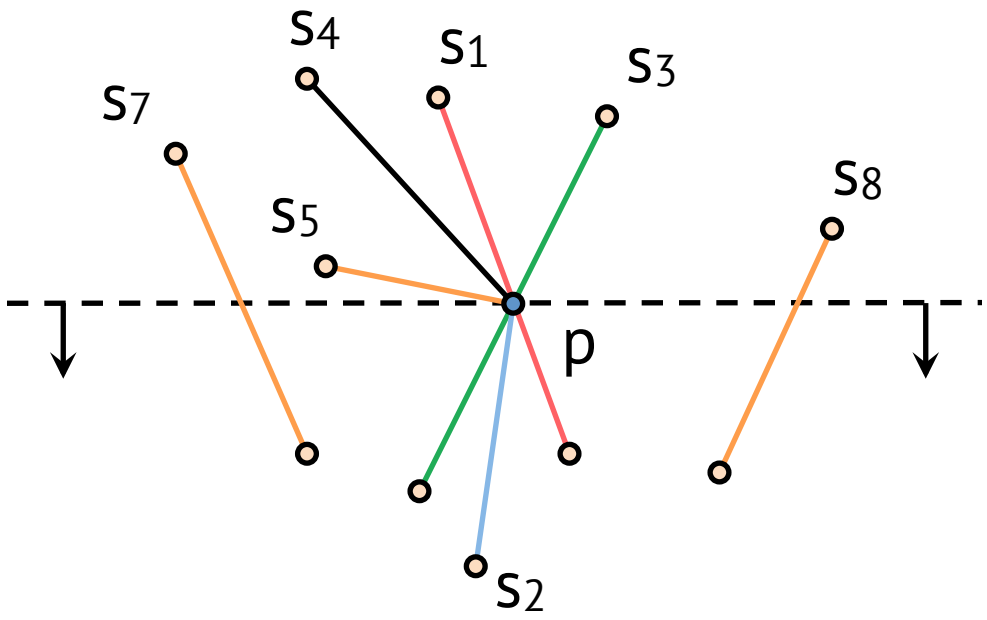




Algorithmus

- FindIntersections(S)
  - Q ← empty
  - insert segment endpoints into Q
  - T ← empty
  - while Q is not empty do
    - determine next event point p in Q
    - delete p from Q
    - HandleEventPoint(p)

Algorithmus



U(p) = segments with upper endpoint p = {s_2}

L(p) = segments in T with lower endpoint p = {s_4,s_5}

C(p) = segments in T that contain p in their interior = {s_1,s_3}

Algorithmus

- HandleEventPoint(p)

  determine U(p), L(p), C(p)

  if #L(p)+#U(p)+#C(p) > 1 then

    report p as intersection

  delete L(p), C(p) from T, insert U(p), C(p) into T

  if U(p) ∪ C(p) is empty then

    $s_l, s_r \leftarrow$ left, right neighbors of p in T

    FindNewEvent(s_l,s_r,p)

  else

    s' ← leftmost segment of U(p) ∪ C(p)

    $s_l \leftarrow$ left neighbor of s' in T

    FindNewEvent(s_l, s', p)

    s'' ← rightmost segment of U(p) ∪ C(p)

    $s_r \leftarrow$ right neighbor of s'' in T

    FindNewEvents(s'', s_r, p)

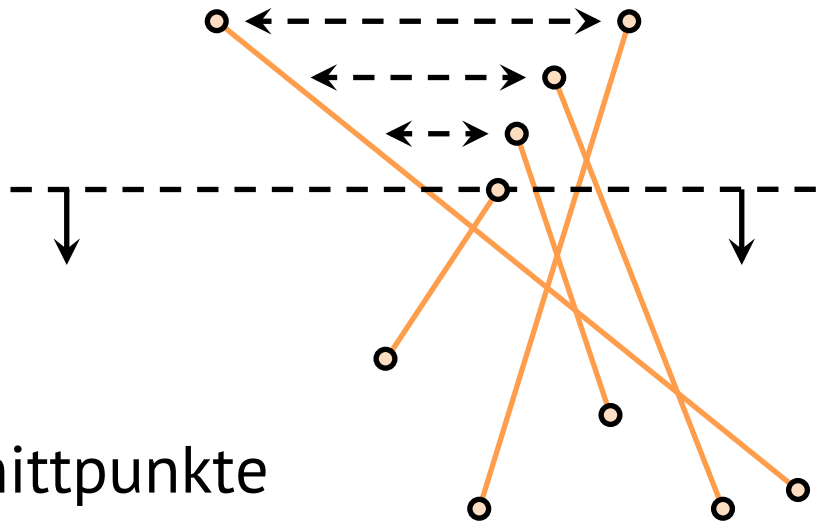
Algorithmus

- FindNewEvent(s_l,s_r,p)

  if s_l and s_r intersect below L or
  on L and to the right of p then
  $r \leftarrow s_l \cap s_r$
  if $r \notin Q$ then
  insert(r, Q)

Erweiterung

- Um Speicherplatz zu sparen wird der Schnittpunkt zweier Segmente s_1 und s_2 aus Q entfernt, sobald s_1 und s_2 nicht mehr benachbart sind → Speicher(Q)=O(n)



n Segmente, i Schnittpunkte
→ $\text{Speicher}_{naiv}(Q) = O(n+i)$

Aufwand

- Ohne Beweis: Der Algorithmus FindIntersections
  - ist korrekt und
  - findet die i Schnittpunkte von n Segmenten in O((n+i) log n) Schritten mit einem Speicheraufwand von O(n).
- Anschaulich
  - Wir haben O(n+i) Events
  - Status enthält max. n Segmente → O(log n)
  - Queue enthält max. n+i Segmente
    → $O(\log(n+i)) = O(\log(n+n^2)) = O(\log n)$

2.7 Geometrische Algorithmen

2.7.1 Inside-Test

2.7.2 Konvexe Hülle

2.7.3 Nachbarschaften

2.7.4 Schnittprobleme

- 2.7.4.1 Schnitt von Liniensegmenten
- 2.7.4.1 Repräsentation von planaren Unterteilungen
- 2.7.4.3 Überlagerung von Unterteilungen

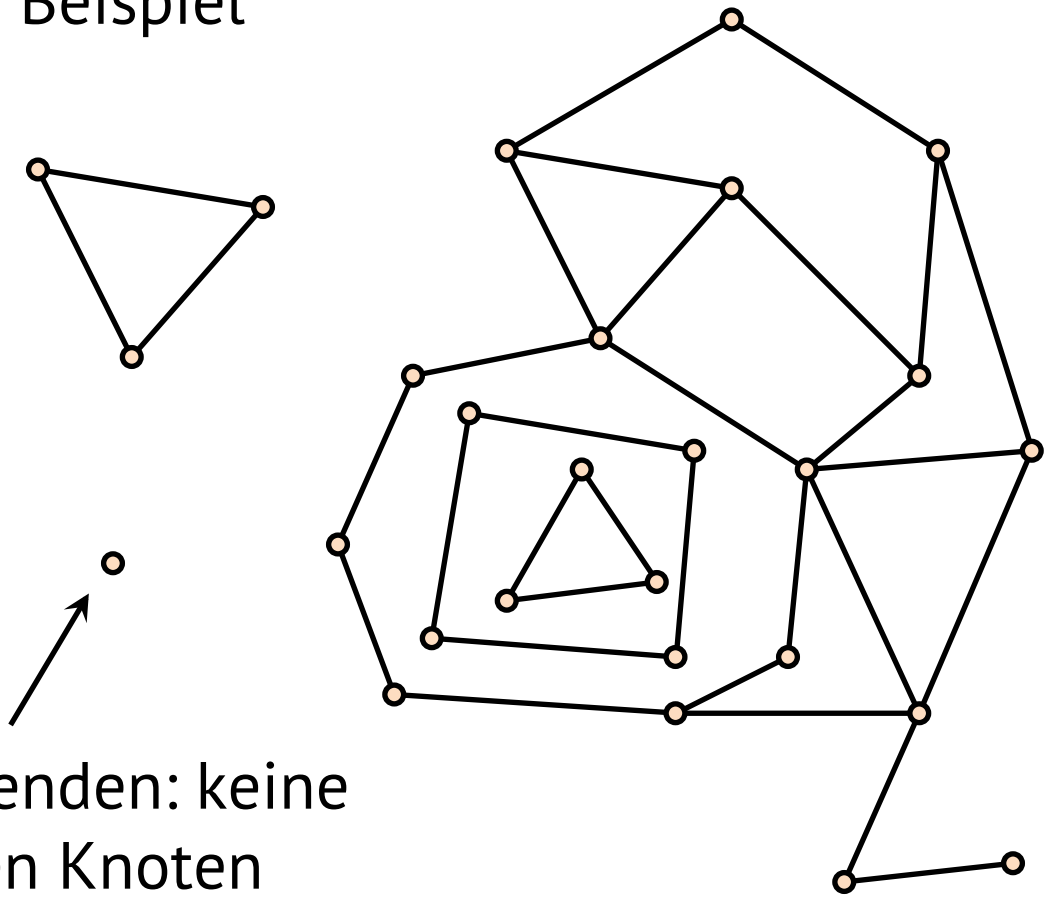
Planare Unterteilungen

- Eine planare Unterteilung S der Ebene besteht aus
  - Knoten $V = \{v_1,\ldots,v_n\} \subseteq R^2$
  - Kanten $E \subseteq V \times V$

  so dass sich das Innere der Kanten nicht schneidet.
- Maximal zusammenhängende Gebiete heißen Facetten. Eine Facette ist also ein durch Kanten und Knoten begrenztes Polygon.
- Komplexität(S) = Zahl der Knoten + Zahl der Kanten + Zahl der Facetten

Planare Unterteilungen

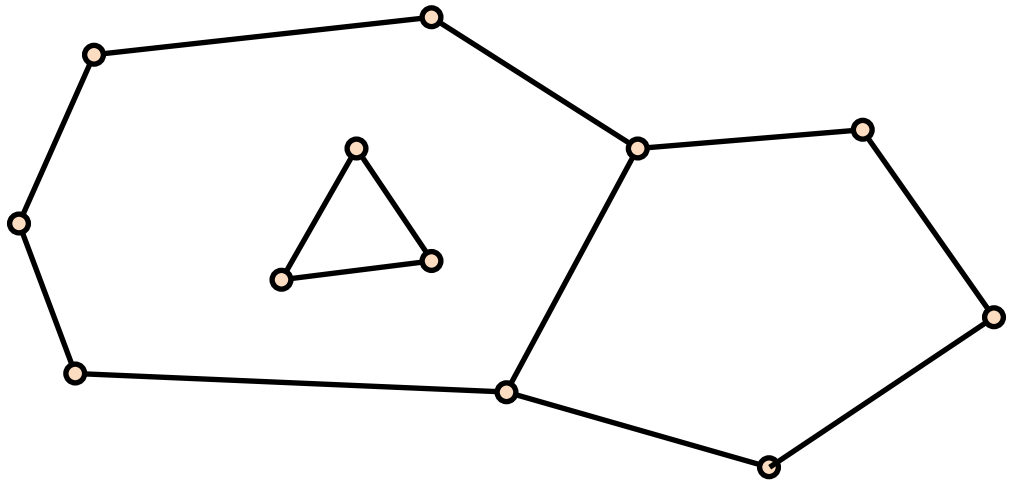
- Beispiel



im Folgenden: keine isolierten Knoten

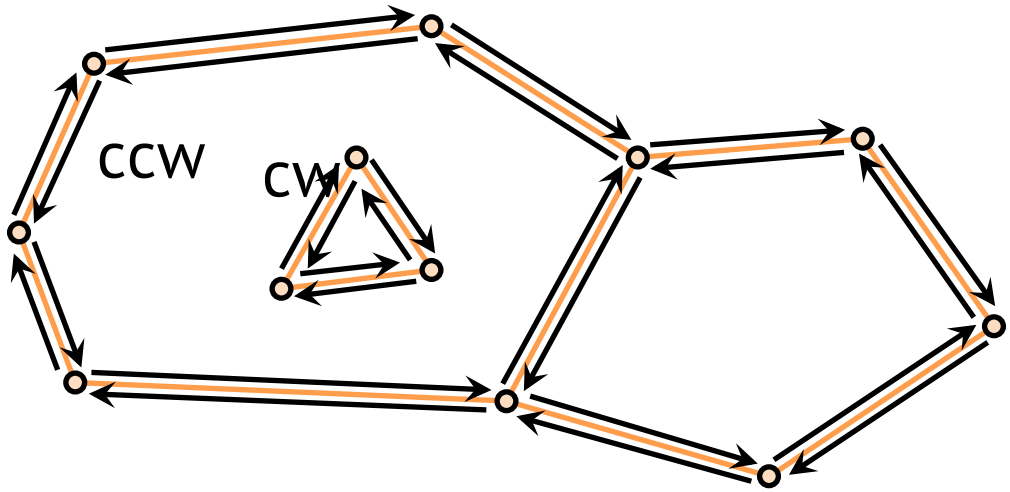
DCEL

- Doubly-connected edge list
  - Ersetze jede Kante durch zwei Halbkanten.
  - Konvention: Die Halbkanten seien so orientiert, dass die zugehörige Facette links von der Halbkante liegt.



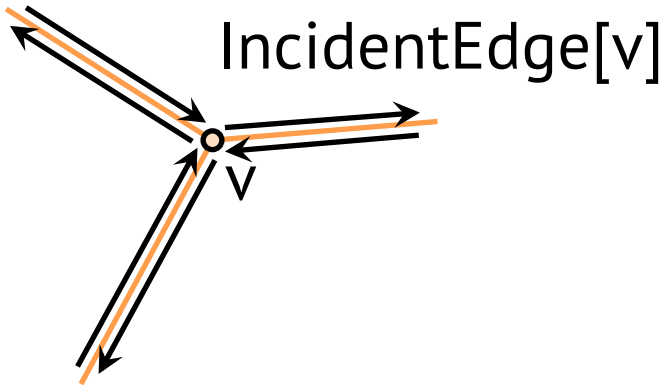
DCEL

- Doubly-connected edge list
  - Ersetze jede Kante durch zwei Halbkanten.
  - Konvention: Die Halbkanten seien so orientiert, dass die zugehörige Facette links von der Halbkante liegt.



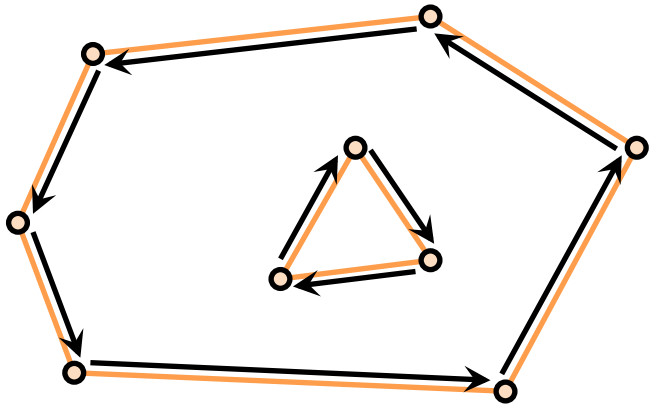
DCEL

- Zu jedem Knoten v speichern wir
  - Coordinates[v]
    Die Koordinaten von v
  - IncidentEdge[v]
    Eine bel. Halbkante mit v als Ursprung



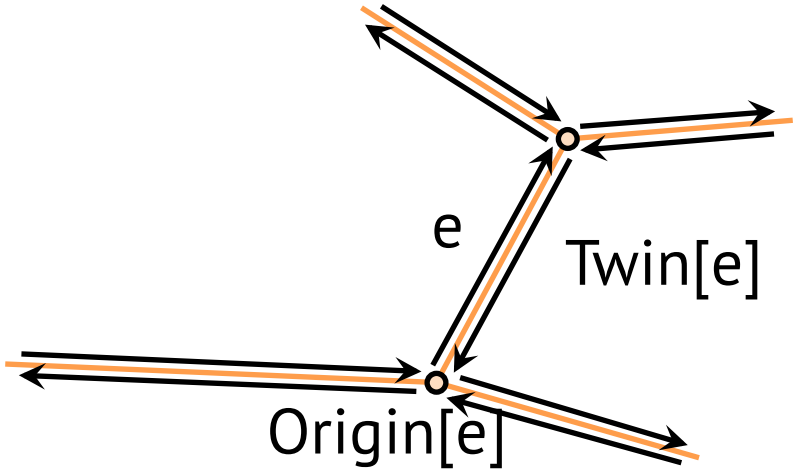
DCEL

- Zu jeder Facette f speichern wir
  - OuterComponent[f]
    Eine Halbkante des Rands von f (=NIL für die äußerste Facette)
  - InnerComponents[f]
    Eine Liste, die eine Halbkante von jedem Loch in f enthält.
  - Label[f]
    Bel. Beschriftung von f



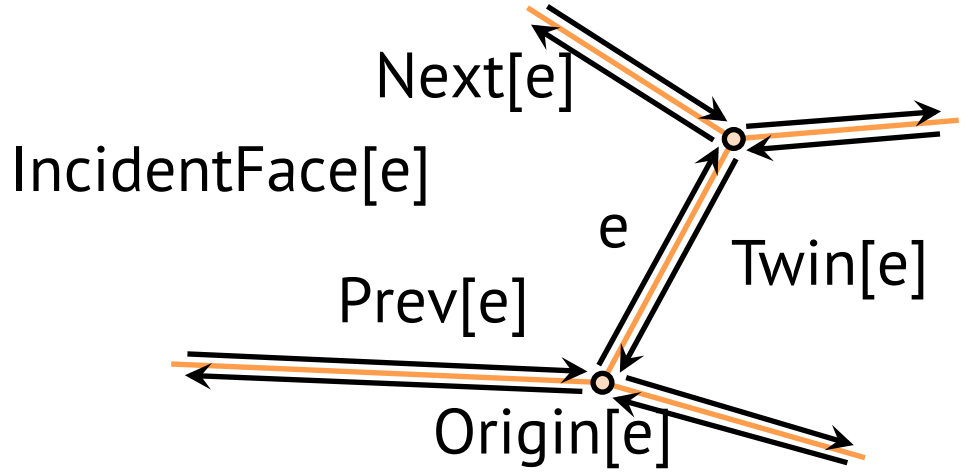
DCEL

- Zu jeder Halbkante e speichern wir
  - Origin[e]
    Den Ursprungsknoten
  - Twin[e]
    Die Nachbarhalbkante



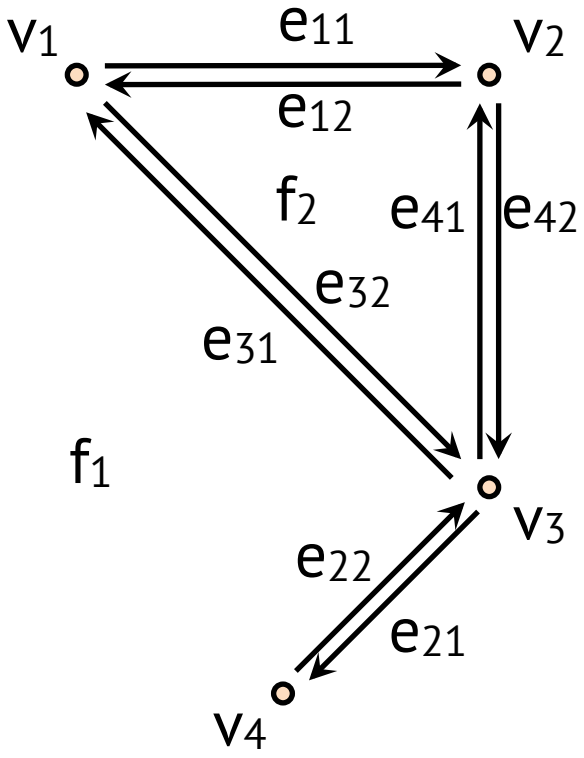
DCEL

- Zu jeder Halbkante e speichern wir
  - IncidentFace[e]
    Die angrenzende Facette
  - Prev[e], Next[e]
    Vorgänger- und Nachfolgehalbkante



DCEL

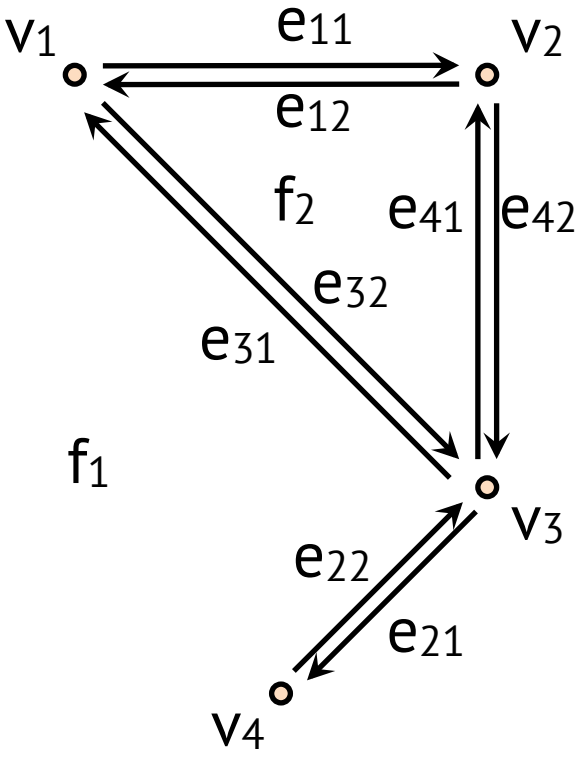
- Beispiel



Knoten	Coordinates	IncidentEdge
v_1	(0,4)	e_{11}
v_2	(2,4)	e_{42}
v_3	(2,2)	e_{21}
v_4	(1,1)	e_{22}

DCEL

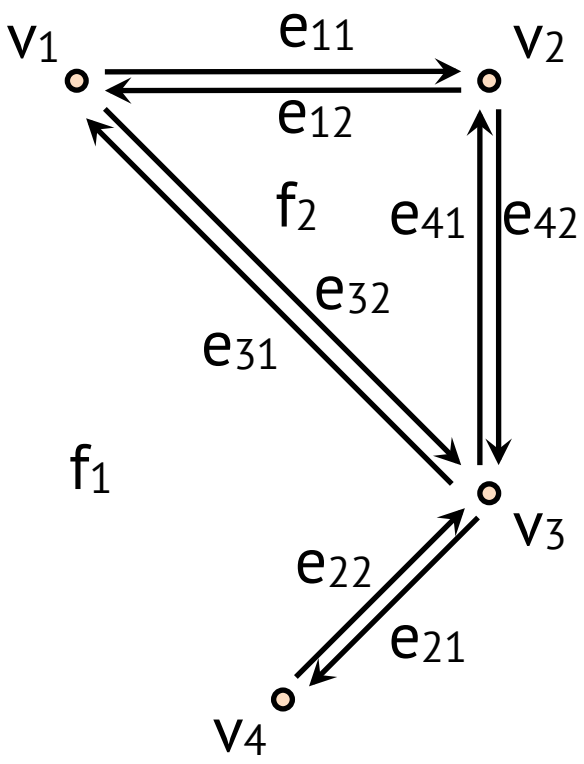
- Beispiel



Facette	OuterComponent	InnerComponents
f_1	NIL	e_{11}
f_2	e_{41}	NIL

DCEL

- Beispiel



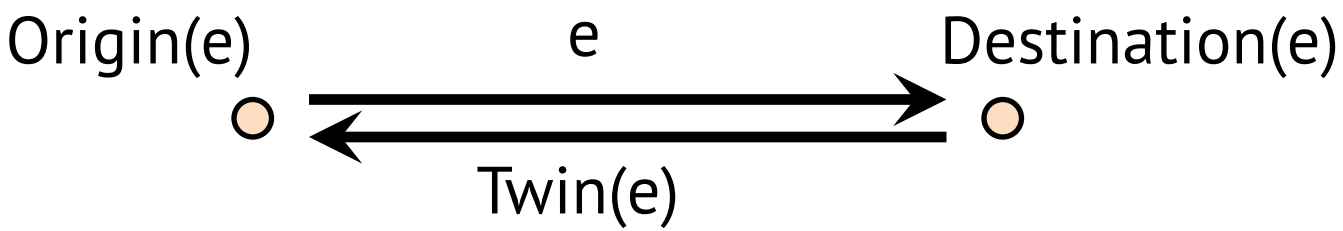
Halfedge	Origin	Twin	Incident Face	Next	Prev
e_{11}	v_1	e_{12}	f_1	e_{42}	e_{31}
e_{12}	v_2	e_{11}	f_2	e_{32}	e_{41}
e_{21}	v_3	e_{22}	f_1	e_{22}	e_{42}
e_{22}	v_4	e_{21}	f_1	e_{31}	e_{21}
e_{31}	v_3	e_{32}	f_1	e_{11}	e_{22}
e_{32}	v_1	e_{31}	f_2	e_{41}	e_{12}
e_{41}	v_3	e_{42}	f_2	e_{12}	e_{32}
e_{42}	v_2	e_{41}	f_1	e_{21}	e_{11}

DCEL

- Konstanter Speicheraufwand für Knoten und Kanten
- Speicheraufwand für Facetten nicht konstant, da abhängig von der Zahl der Löcher, aber ⩽ der Zahl der Kanten
- Speicheraufwand: O(Komplexität(S))

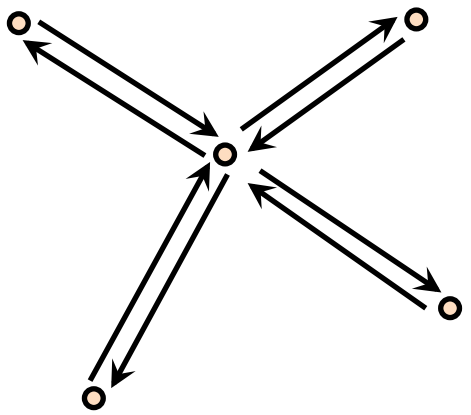
DCEL: Operationen

- Destination(e) = Origin(Twin(e))



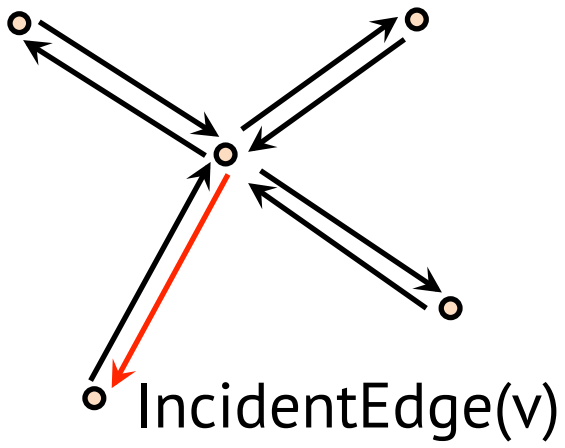
DCEL: Operationen

- EnumerateNeighbors(v)
  e ← IncidentEdge(v)
  repeat
    // do something with Destination(e)
    e ← Next(Twin(e))
  until e = IncidentEdge(v)



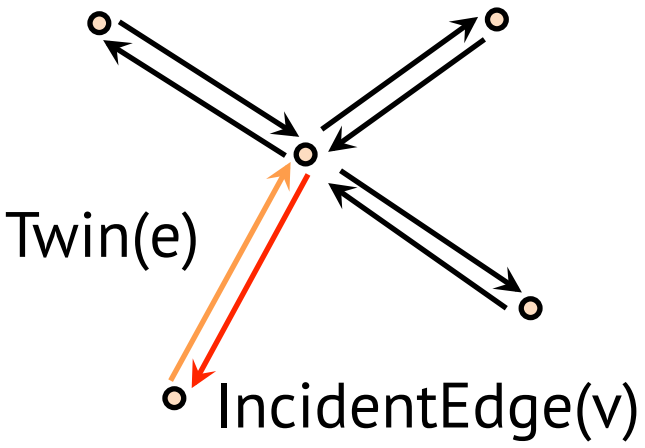
DCEL: Operationen

- EnumerateNeighbors(v)
  e ← IncidentEdge(v)
  repeat
    // do something with Destination(e)
    e ← Next(Twin(e))
  until e = IncidentEdge(v)



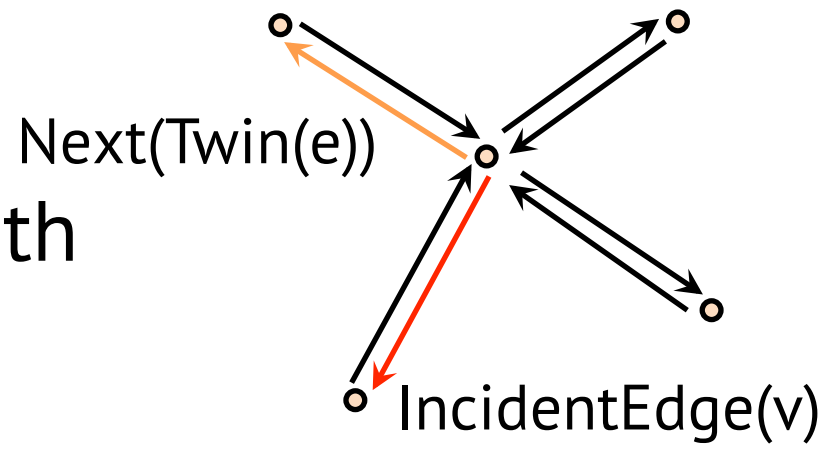
DCEL: Operationen

- EnumerateNeighbors(v)
  e ← IncidentEdge(v)
  repeat
    // do something with Destination(e)
    e ← Next(Twin(e))
  until e = IncidentEdge(v)



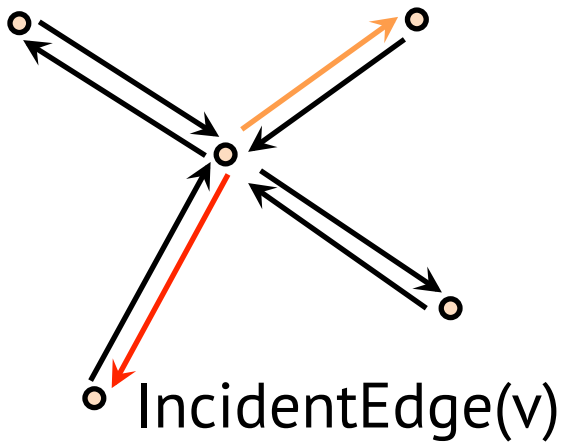
DCEL: Operationen

- EnumerateNeighbors(v)
  e ← IncidentEdge(v)
  repeat
    // do something with Destination(e)
    e ← Next(Twin(e))
  until e = IncidentEdge(v)



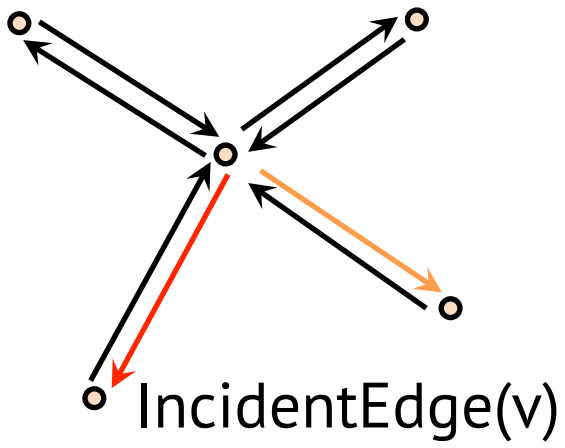
DCEL: Operationen

- EnumerateNeighbors(v)
  e ← IncidentEdge(v)
  repeat
    // do something with Destination(e)
    e ← Next(Twin(e))
  until e = IncidentEdge(v)



DCEL: Operationen

- EnumerateNeighbors(v)
  e ← IncidentEdge(v)
  repeat
    // do something with Destination(e)
    e ← Next(Twin(e))
  until e = IncidentEdge(v)



DCEL: Operationen

- EnumerateEdges(f)

```
holes ← OuterComponent(f) ∪
                InnerComponents(f)
for all e0 in holes do
    e ← e0
    repeat
        // do something with e
        e ← Next(e)
    until e = e0
```

2.7 Geometrische Algorithmen

2.7.1 Inside-Test

2.7.2 Konvexe Hülle

2.7.3 Nachbarschaften

2.7.4 Schnittprobleme

2.7.4.1 Schnitt von Liniensegmenten

2.7.4.2 Repräsentation von planaren Unterteilungen

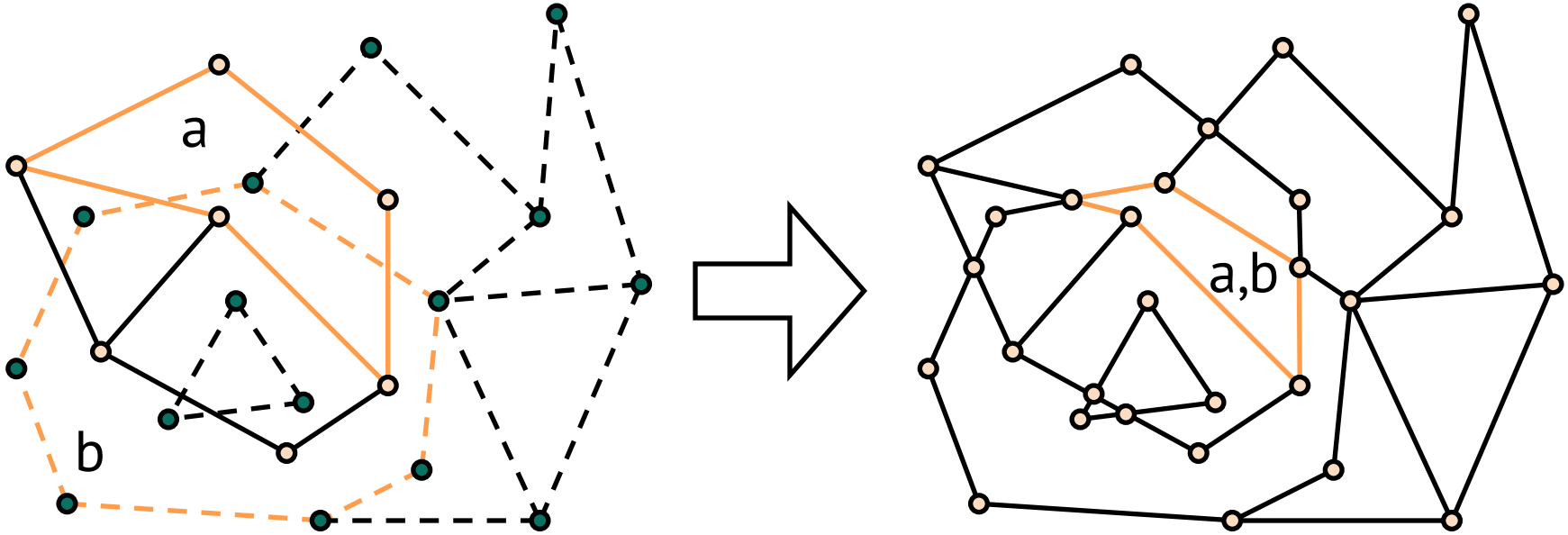
2.7.4.3 Überlagerung von Unterteilungen

Überlagerungen

- Problem
  - Gegeben seien zwei Unterteilungen S_1, S_2 der Ebene als DCELs
  - Gesucht ist die Überlagerung $O(S_1,S_2)$ von S_1 und S_2 als DCEL.
  - Jede Facette f aus $O(S_1,S_2)$ soll mit den Labels der Facetten aus S_1 und S_2 beschriftet werden, die f enthalten

Überlagerungen

- Beispiel



Überlagerungen

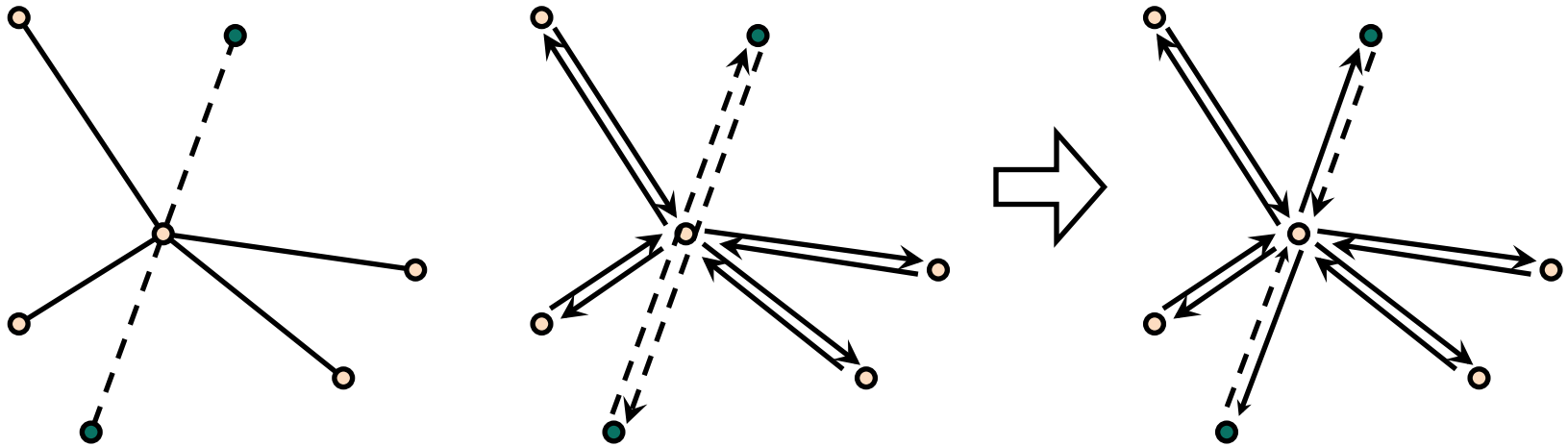
- Ablauf
  - Bestimme zunächst nur die Knoten und Halbkanten von $O(S_1,S_2)$ einschließlich korrekter Verzeigerung
  - In einem zweiten Schritt werden die Facetten bestimmt und beschriftet

Überlagerungen

- Bestimmung der Knoten und Halbkanten
  - Setze $D = S_1 \cup S_2$, D ist allerdings keine gültige Unterteilung der Ebene
  - Transformiere D mittels eines Plane-Sweep Algorithmus in eine DCEL $O(S_1,S_2)$, die die Überlagerung von S_1 und S_2 darstellt
  - Wird ein Event erreicht, so muss D entsprechend aktualisiert werden

Überlagerungen

- Beispiel: Knoten aus S_1 liegt exakt auf einer Kante von S_2



- Erzeuge neue Kanten, setze Zeiger entsprechend um

Überlagerungen

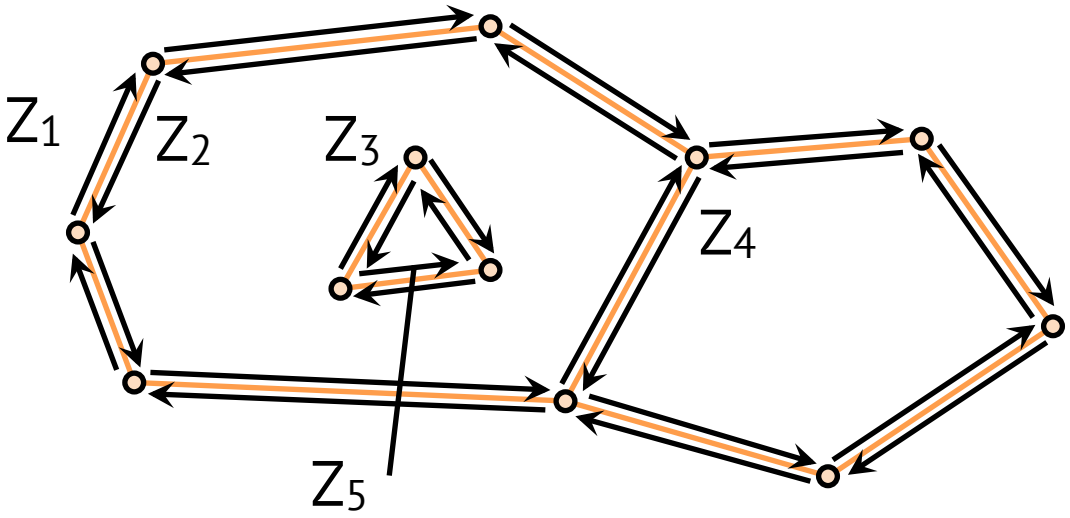
- Ähnlich
  - Knoten aus S_1 liegt auf Knoten aus S_2
  - Kante aus S_1 schneidet Kante aus S_2

Facetten

- Die Knoten und Kanten sind nun korrekt berechnet
- Bestimme und beschrifte die Facetten aus O(S1,S2)

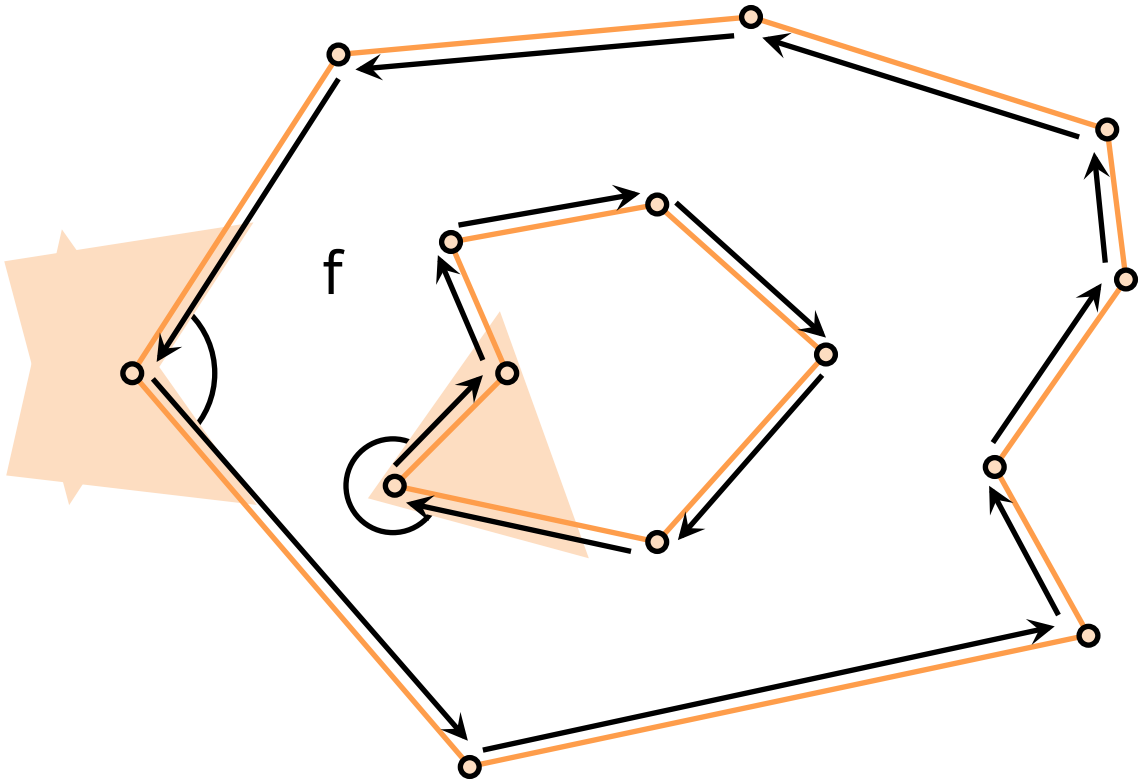
Facetten

- Bestimme zunächst alle Zyklen von Halbkanten
  - Beschreibt ein Zyklus einen äußeren Rand oder einen Lochrand?
  - Welche Zyklen begrenzen die gleiche Facette?



Facetten

- Beschreibt ein Zyklus Z einen äußeren Rand oder einen Lochrand?

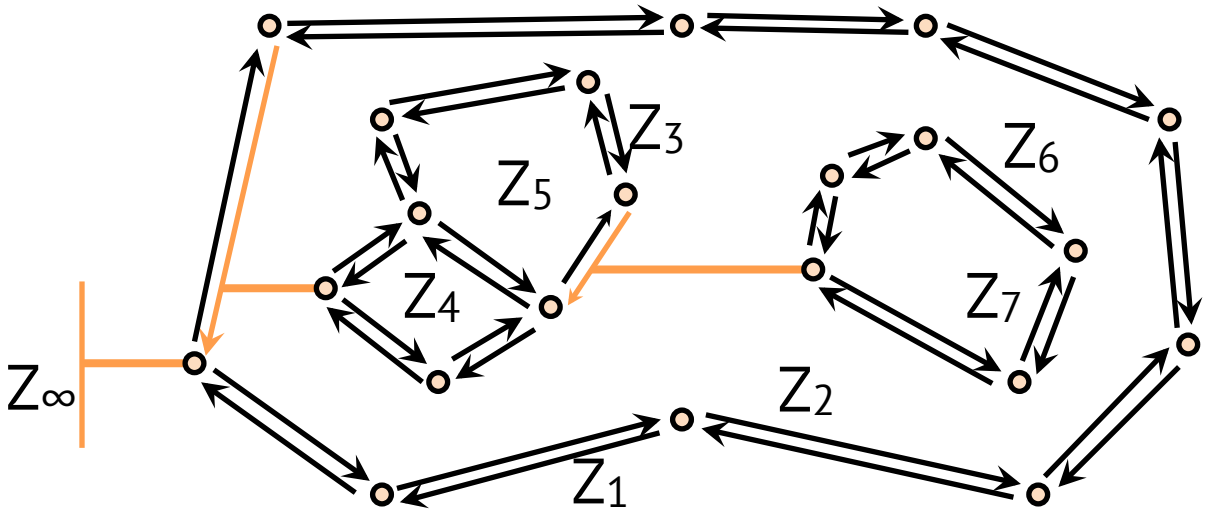


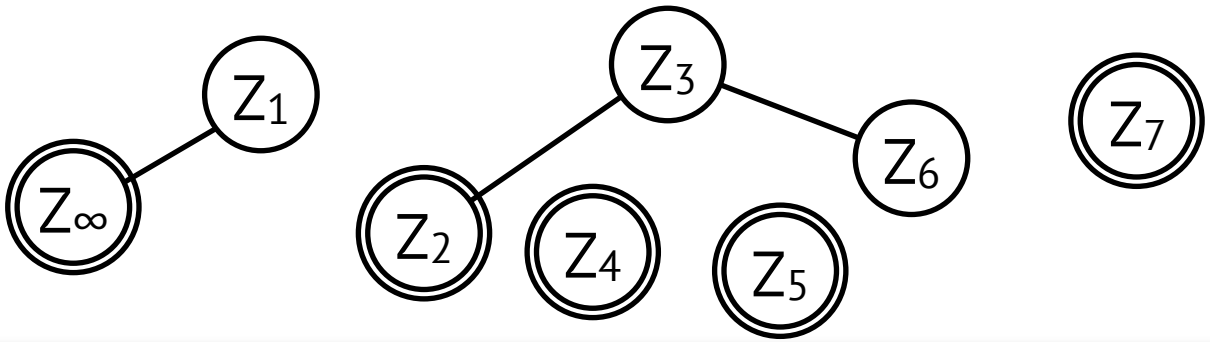
Facetten

- Beschreibt ein Zyklus Z einen äußeren Rand oder einen Lochrand?
  - Die (unbekannte) angrenzende Facette liegt links von den Halbkanten.
  - Betrachte den linkesten Knoten im Zyklus und berechne den Winkel α innerhalb der angrenzenden Facette.
  - Ist α kleiner 180 Grad, so handelt es sich um einen äußeren Rand.
  - Ist α größer als 180 Grad, so handelt es sich um einen Lochrand.

Facetten

- Welche Zyklen begrenzen die gleiche Facette?





Facetten

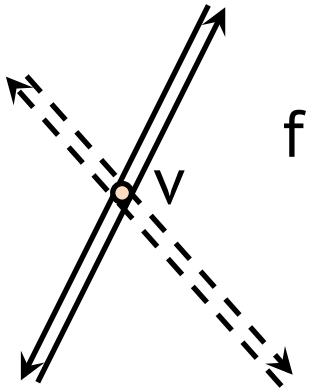
- Welche Zyklen begrenzen die gleiche Facette?
  - Erzeuge einen Graph G
    - Die Zyklen sind die Knoten
    - Zusätzlich gibt es einen Knoten für den imaginären Rand der Konfiguration
    - Zwei Zyklen/Knoten Z_1, Z_2 werden verbunden, wenn Z_1 ein Lochrand ist und Z_2 eine Halbkante e direkt links vom linkesten Knoten in Z_1 enthält
  - Die Halbkante e kann schon während des Plane-Sweeps bestimmt werden!

Facetten

- Welche Zyklen begrenzen die gleiche Facette?
  - Die Zusammenhangskomponenten von G sind die Facetten

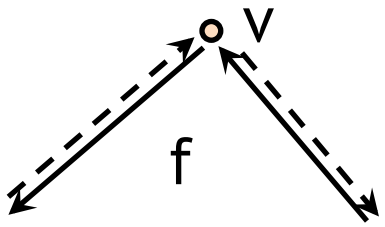
Facetten

- Welche Beschriftung erhält eine Facette f?
  - Es sei v ein Knoten von f der als Schnittpunkt von Kanten aus S_1 und aus S_2 entstanden ist
    ➞ aus den IncidentFace Zeigern können die angrenzenden Facetten und deren Beschriftung bestimmt werden



Facetten

- Welche Beschriftung erhält eine Facette f?
  - Ist v ein Knoten von f (oBdA) aus S_1 der kein Schnittpunkt ist, so kennen wir zunächst nur die Facette aus S_1, die f enthält
  - Um die Facette aus S_2 die f enthält zu bestimmen, müssen wir herausfinden, in welcher Facette von S_2 der Knoten v liegt → einfache Modifikation des Plane-Sweep Algorithmus



Fazit

- Es sei S_1 eine Unterteilung mit Komplexität n_1 und S_2 eine Unterteilung mit Komplexität n_2. Die Überlagerung von S_1 und S_2 kann in

$$O(n \log n + k \log n)$$

Schritten berechnet werden, wobei $n = n_1 + n_2$ und k die Komplexität der Überlagerung ist.