2.7 Geometrische Algorithmen

Nachbarschaften

- Gegeben sei eine Punktmenge $p_1,\ldots,p_n$
- Problemstellungen
  - geringster Abstand zwischen zwei p_i
  - k nächste Punkte zu p_i
  - k nächste Punkte zu (x,y)
  - alle Punkte innerhalb eines Kreises (x,y,r)
  - …

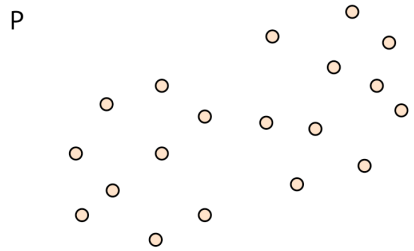
Maximale Punktdichte

- Gegeben: Punktmenge $p_1,\ldots,p_n$
- $d_{ij} = ||p_j - p_i||$
- finde $\min_{ij} \{d_{ij}\}$
- triviale Lösung in $O(n^2)$
- schnellerer Algorithmus?

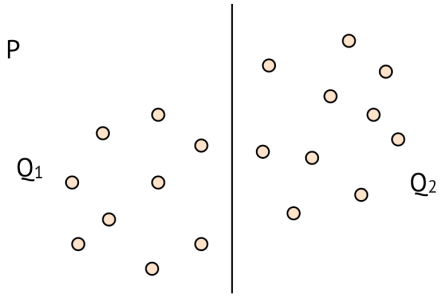
Maximale Punktdichte

- Versuche bestimmte Punktpaare p_i,p_j ohne weitere Berechnung auszuschliessen
- Ansatz: Divide & Conquer
  - Teile die Menge $P=\{p_1,\ldots,p_n\}$ in $Q_1=\{p_1,\ldots,p_{n/2}\}$ und $Q_2=\{p_{n/2+1},\ldots,p_n\}$
  - minimaler Abstand innerhalb Q_1
  - minimaler Abstand innerhalb Q_2
  - minimaler Abstand zwischen Q_1 und Q_2

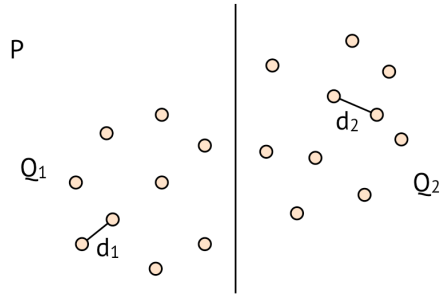
Divide & Conquer



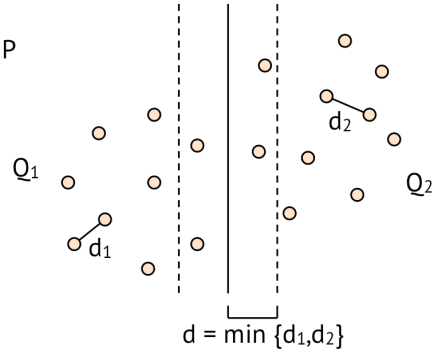
Divide & Conquer



Divide & Conquer



Divide & Conquer



1. Algorithmus

- MinDist(p[1..n])
  sort p[i] by increasing x-coordinate
  d ← MinDistRec(p[1..n])
  return d

1. Algorithmus

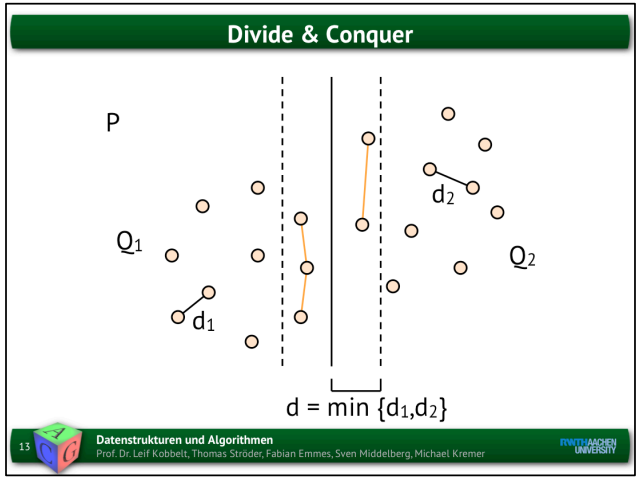
- MinDistRec(p[1..n])
  d_1 ← MinDistRec(p[1..n/2])
  d_2 ← MinDistRec(p[n/2+1..n])
  d ← min(d_1, d_2)
  x ← (p[n/2].x + p[n/2+1].x) / 2
  Q_1 ← select p[i ⩽ n/2] where |p[i].x - x| ⩽ d
  Q_2 ← select p[i > n/2] where |p[i].x - x| ⩽ d
  d_3 ← MinDistCross(Q_1,Q_2)
  return min(d,d_3)

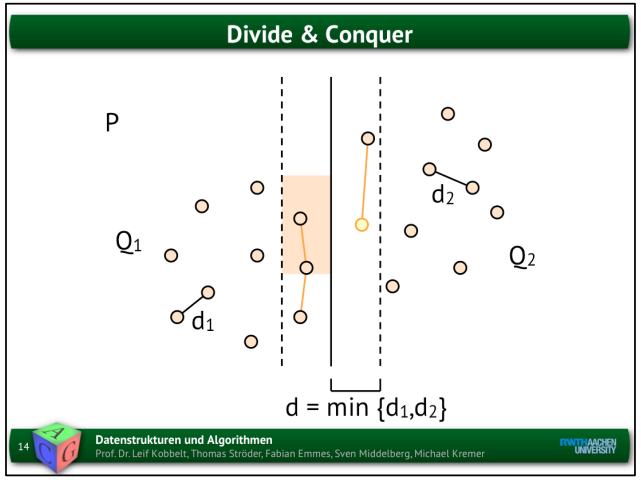
1. Algorithmus

- $T(n) = 2\,T(n/2) + O(n^2)$
- $T(n) = O(n^2)$
- ... nicht besser als die triviale Lösung

2. Algorithmus

- Die Kandidaten für minimale Distanzen in der Menge Q können weiter eingeschränkt werden ...



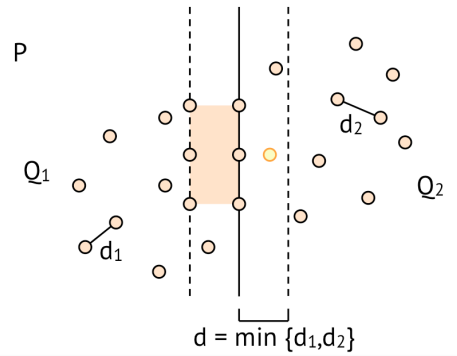


Bilder Korridor um Teillinie, in welcher das globale Minimum liegen kann (da wir bereits zwei Punkte mit Abstand min{d1,d2} gefunden haben)

2. Algorithmus

- Die Kandidaten für minimale Distanzen in der Menge Q können weiter eingeschränkt werden …
- … jeder Punkt muss mit maximal sechs Kandidaten verglichen werden

Divide & Conquer



Wie finden wir die Punkte mit welchen man einen Punkt der anderen Seite vergleichen muss? Sortiere Punkte!

2. Algorithmus

- MinDistRec(p[1..n])
  - $d_1 \leftarrow$ MinDistRec(p[1..n/2])
  - $d_2 \leftarrow$ MinDistRec(p[n/2+1..n])
  - $d \leftarrow \min(d_1, d_2)$
  - $x \leftarrow$ (p[n/2].x + p[n/2+1].x) / 2
  - $Q_1 \leftarrow$ select p[i ⩽ n/2] where |p[i].x - x| ⩽ d
  - $Q_2 \leftarrow$ select p[i > n/2] where |p[i].x - x| ⩽ d
  - sort Q_1, Q_2 by increasing y-coordinate
  - $d_3 \leftarrow$ MinDistRestrict(Q_1,Q_2,d)
  - return min(d,d_3)

2. Algorithmus

- MinDistRestrict(q[1..k], q'[1..k'], d)
  - dist ← d
  - l ← 1, r ← 1
  - for i ← 1 to k do
    - while q'[l].y < q[i].y−d and l < k' do
      - l ← l + 1
    - while q'[r].y < q[i].y+d and r ⩽ k' do
      - r ← r + 1
    - for j ← l to r − 1 do
      - dist ← min(dist, dist(q[i],q'[j]))
  - return dist

2. Algorithmus

- MinDistRestrict(q[1..k], q'[1..k'], d)

```
dist ← d
l ← 1, r ← 1
for i ← 1 to k do                                   } O(n)
    while q'[l].y < q[i].y−d and l < k' do          } O(1)
        l ← l + 1
    while q'[r].y < q[i].y+d and r ≤ k' do
        r ← r + 1
    for j ← l to r − 1 do                           } O(1)
        dist ← min(dist, dist(q[i],q'[j]) )
return dist
```


2. Algorithmus

- MinDistRec(p[1..n])

```
d1 ← MinDistRec( p[1..n/2] )
d2 ← MinDistRec( p[n/2+1..n] )
d ← min( d1, d2 )
x ← ( p[n/2].x + p[n/2+1].x ) / 2
Q1 ← select p[i ≤ n/2] where |p[i].x - x| ≤ d      } O(n)
Q2 ← select p[i > n/2] where |p[i].x - x| ≤ d      } O(n)
sort Q1, Q2 by increasing y-coordinate             } O(nlogn)
d3 ← MinDistRestrict(Q1,Q2,d)                      } O(n)
return min(d,d3)
```

2. Algorithmus

- $T(n) = 2 \times T(n/2) + O(n) + O(n \times \log n)$
- $T(n) = 2 \times T(n/2) + O(n \times \log n)$
- $T(n) = O(n \times \log^2 n)$

3. Algorithmus

- Beobachtung: der MinDist-Algorithmus hat dieselbe Struktur wie Merge-Sort
  - Splitting in zwei gleichgroße Teile
  - Sortierung beim Zusammenfügen
- Merging von sortierten Folgen kostet nur $O(n)$
- MinDistRec() gibt nach der y-Koordinate sortierte Folgen zurück ...

3. Algorithmus

- MinDistRec(p[1..n])
  - $x \leftarrow (p[n/2].x + p[n/2+1].x) / 2$
  - $d_1 \leftarrow$ MinDistRec(p[1..n/2])
  - $d_2 \leftarrow$ MinDistRec(p[n/2+1..n])
  - $d \leftarrow \min(d_1, d_2)$
  - $Q_1 \leftarrow$ select $p[i \leqslant n/2]$ where $|p[i].x - x| \leqslant d$
  - $Q_2 \leftarrow$ select $p[i > n/2]$ where $|p[i].x - x| \leqslant d$
  - merge pre-sorted lists Q_1, Q_2
  - $d_3 \leftarrow$ MinDistRestrict(Q_1,Q_2,d)
  - merge pre-sorted lists $p[i \leqslant n/2], p[i > n/2]$
  - return $\min(d,d_3)$

3. Algorithmus

- MinDistRec(p[1..n])
  - $x \leftarrow (p[n/2].x + p[n/2+1].x) / 2$
  - $d_1 \leftarrow$ MinDistRec(p[1..n/2])
  - $d_2 \leftarrow$ MinDistRec(p[n/2+1..n])
  - $d \leftarrow \min(d_1, d_2)$

O(n)
- $Q_1 \leftarrow$ select $p[i \leqslant n/2]$ where $|p[i].x - x| \leqslant d$
- $Q_2 \leftarrow$ select $p[i > n/2]$ where $|p[i].x - x| \leqslant d$

O(n)
- merge pre-sorted lists Q_1, Q_2

O(n)
- $d_3 \leftarrow$ MinDistRestrict(Q_1,Q_2,d)

O(n)
- merge pre-sorted lists $p[i \leqslant n/2], p[i > n/2]$
- return $\min(d,d_3)$

3. Algorithmus

- $T(n) = 2 \times T(n/2) + O(n)$
- $T(n) = O(n \times \log n)$

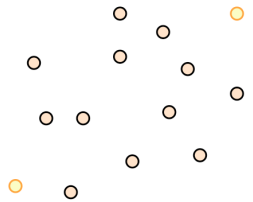
Weitester Abstand

- Gegeben: Punktmenge $p_1,\ldots,p_n$
- $d_{ij} = ||p_j - p_i||$
- finde $\max_{ij} \{d_{ij}\}$
- Durchmesser der Punktmenge
- triviale Lösung in $O(n^2)$
- schnellerer Algorithmus?

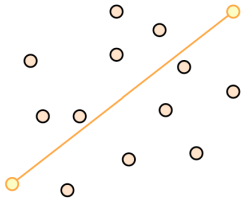
Weitester Abstand

- Versuche wieder bestimmte Punktpaare auszuschließen.
- Der maximale Abstand muss zwischen Extremalpunkten auftreten.
- Beschränke die Suche auf die konvexe Hülle.

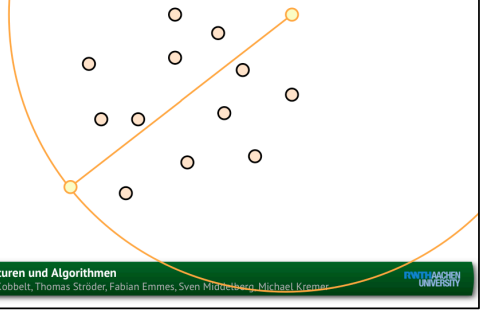
Weitester Abstand



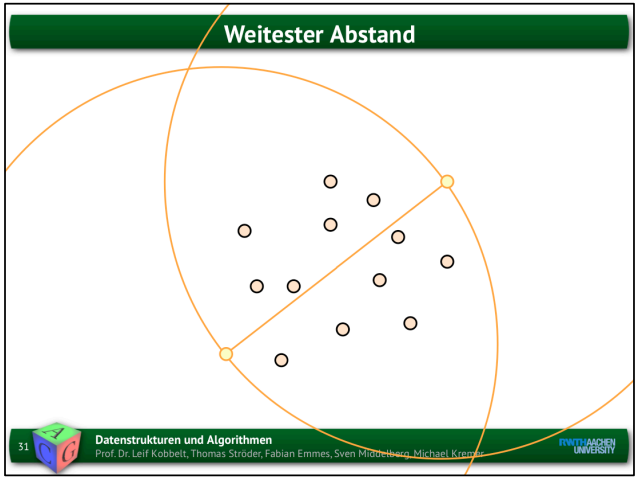
Weitester Abstand



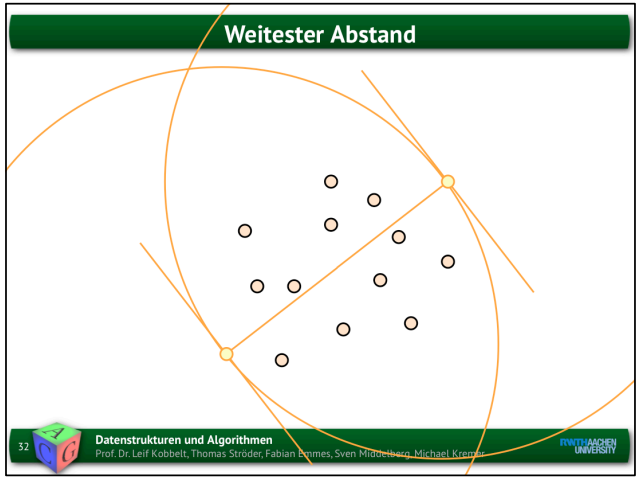
Weitester Abstand



Weitester Abstand



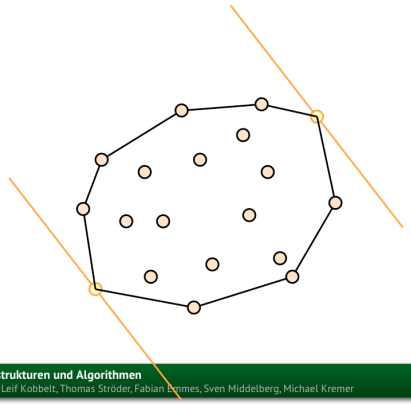
Weitester Abstand

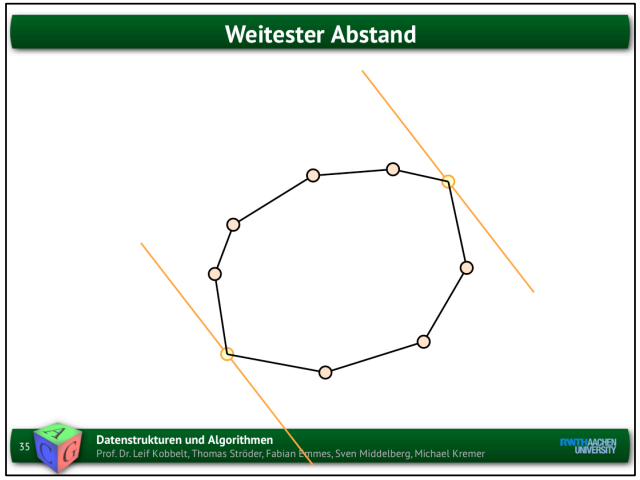


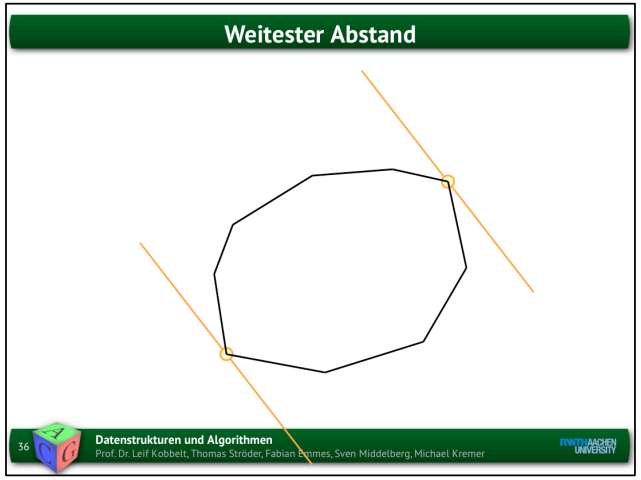
Weitester Abstand

- Geg. Punktmenge $p_1,\ldots,p_n$
  1. Berechne die konvexe Hülle
  2. Suche Extremalpunkte mit parallelen Supporting Lines
  3. Bestimme den maximalen Abstand zwischen diesen Kandidaten

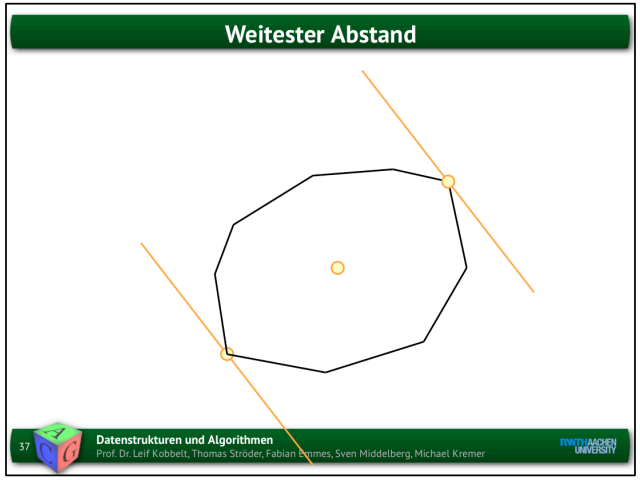
Weitester Abstand

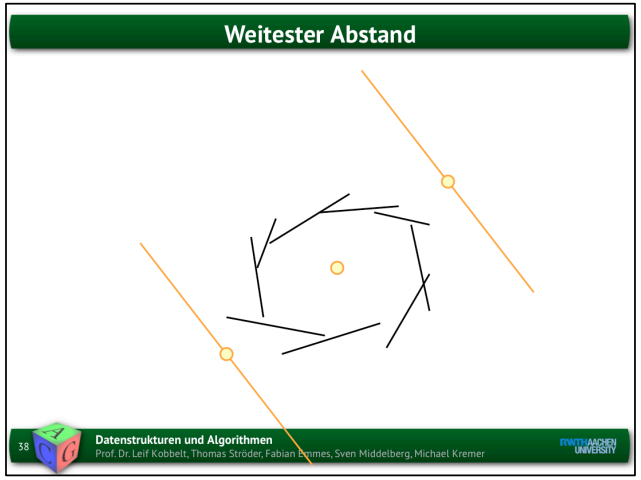






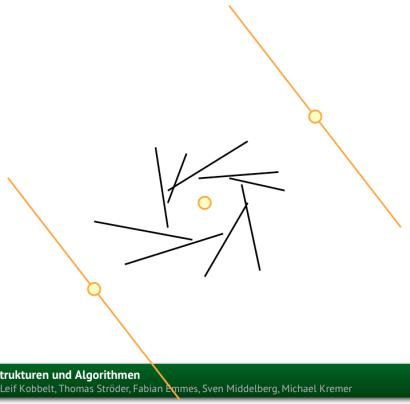
Konvexe Hülle liefert auch Sortierung der Kanten nach Winkel



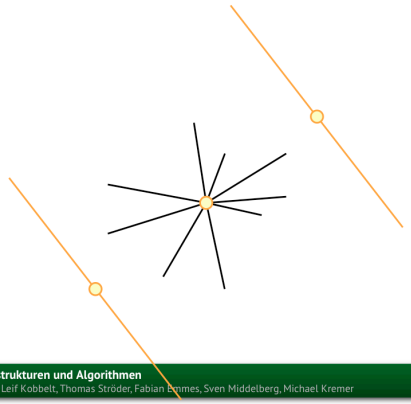


Verschiebe Kanten in Ursprung

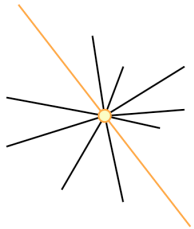
Weitester Abstand



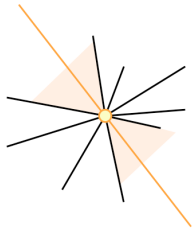
Weitester Abstand



Weitester Abstand



Weitester Abstand



Betrachte nur noch gegenüberliegende Sektoren

Weitester Abstand

1. Berechne die konvexe Hülle — O(nlogn)
2. Suche Extremalpunkte mit parallelen Supporting Lines
   a. die Kanten der konvexen Hülle bilden Sektoren
   b. gegenüberliegende Sektoren enthalten gemeinsame Gerade — O(n)
3. Finde den maximalen Abstand zwischen diesen Kandidaten — O(n)

Nachbarschaften

- Geg. Punktmenge $p_1, \ldots, p_n$
- Typische Problemstellungen :
  - min. / max. Abstand zwischen zwei p_i
  - k nächste Punkte zu p_i
  - k nächste Punkte zu (x,y)
  - alle Punkte innerhalb eines Kreises (x,y,r)
  - …

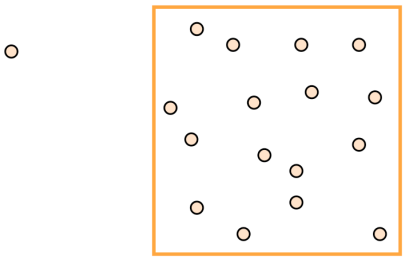
Nächste Punkte

- Beispiele:
  - Datenbanksuche mit Unsicherheit
  - Finde nächste Mobilfunkstation
  - Globale Beleuchtungssimulation
  - ...

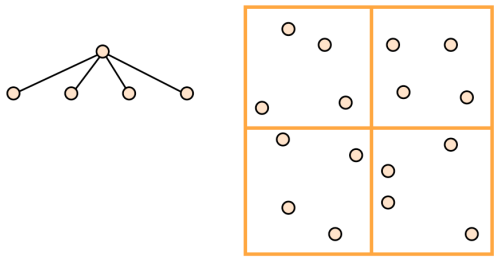
Nächste Punkte

- Geg. Punktmenge $p_1, \ldots, p_n$
- Anfrage: (x,y) [hier: $\mathbb{R}^2$, allg.: $\mathbb{R}^k$]
- Optimale Datenstruktur zum Suchen
  ⇒ Bäume
- Mehrdimensionale Schlüssel
  ⇒ z.B. kD-Bäume

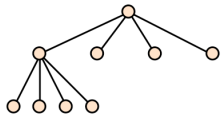
Quadtree

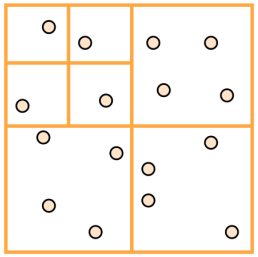


Quadtree

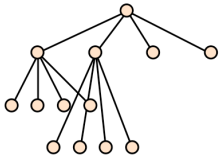


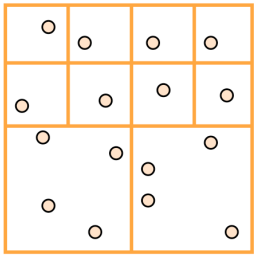
Quadtree



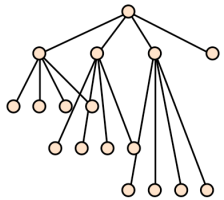


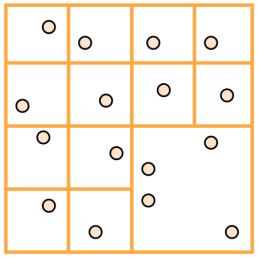
Quadtree



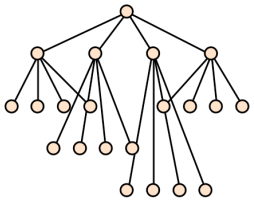


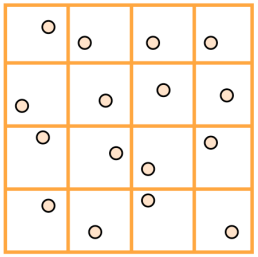
Quadtree



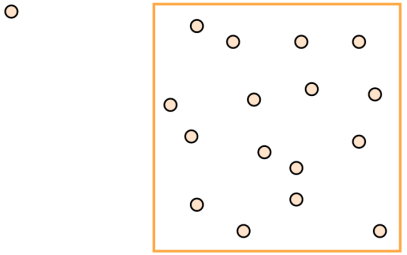


Quadtree

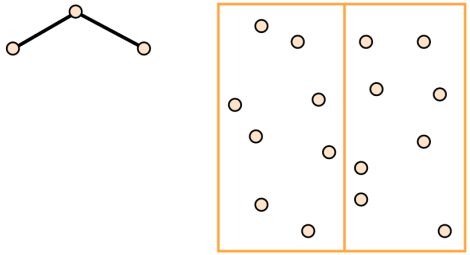




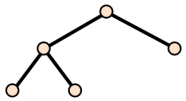
kD-Bäume

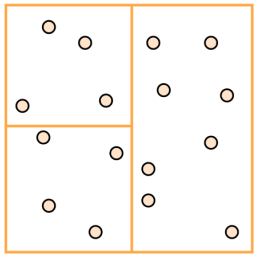


kD-Bäume

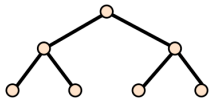


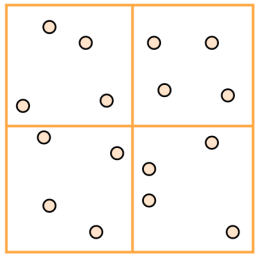
kD-Bäume



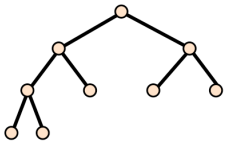


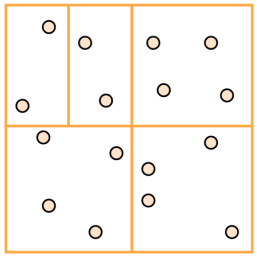
kD-Bäume



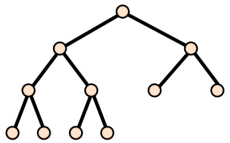


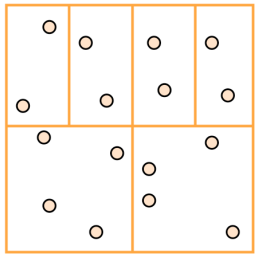
kD-Bäume



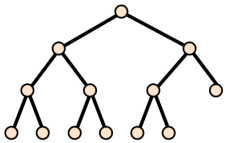


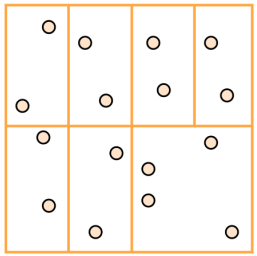
kD-Bäume



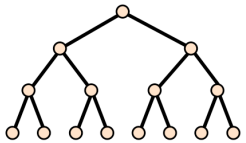


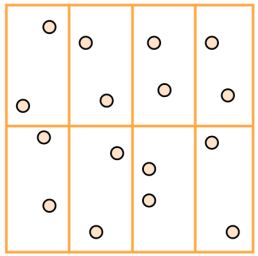
kD-Bäume



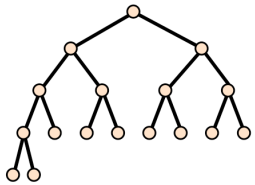


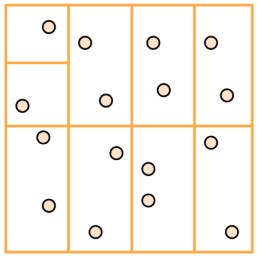
kD-Bäume



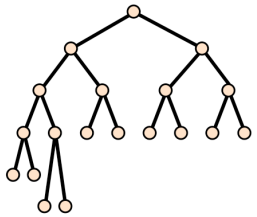


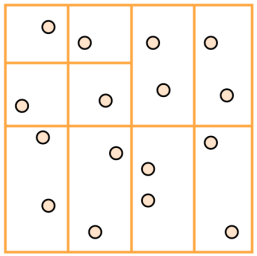
kD-Bäume



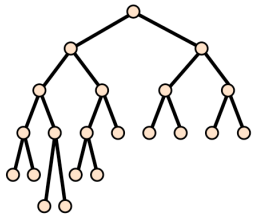


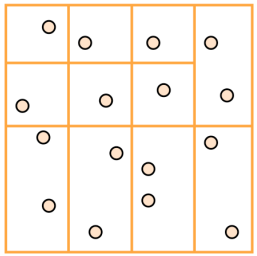
kD-Bäume



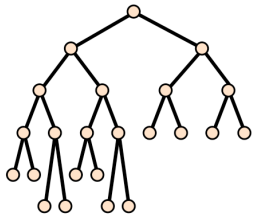


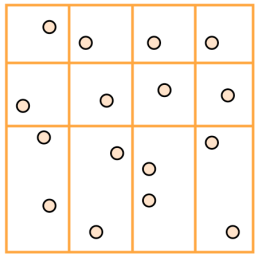
kD-Bäume



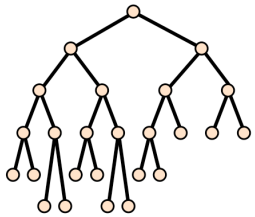


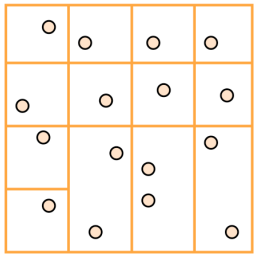
kD-Bäume



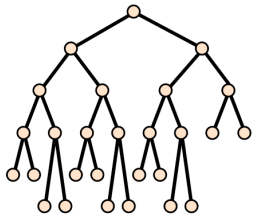


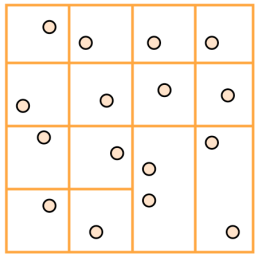
kD-Bäume



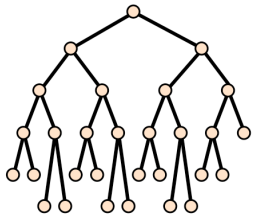


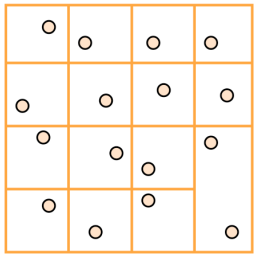
kD-Bäume



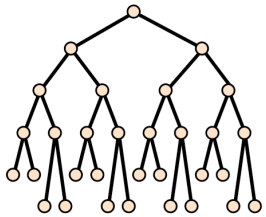


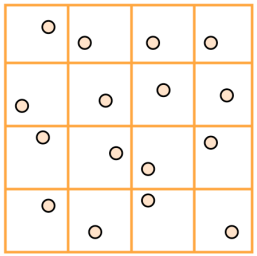
kD-Bäume





kD-Bäume





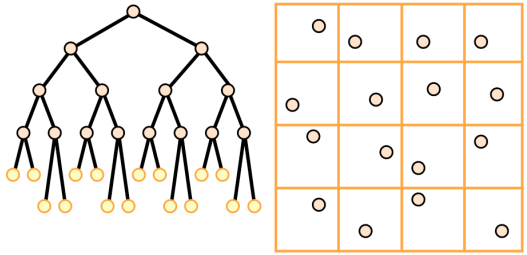
kD-Baum Suche

- In welcher Zelle liegt der Anfragepunkt
- In welchen Zellen muß nach dem nächsten Punkt gesucht werden
- Effizienter Auschluß weit entfernter Zellen

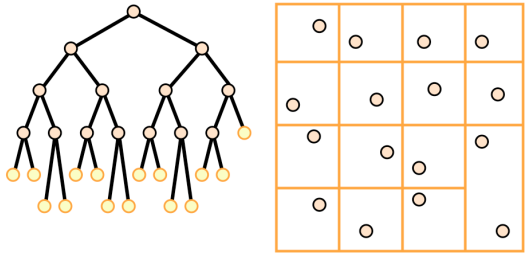
kD-Baum Suche

- Jedes kD-Baum Blatt enthält einen der gegebenen Punkte p_i
- Jeder innere kD-Baum Knoten enthält eine Ebene, die die Punkte im linken und rechten Teilbaum separiert.

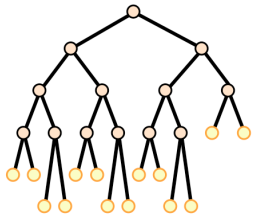
kD-Bäume

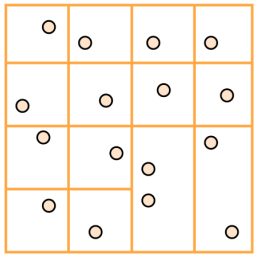


kD-Bäume

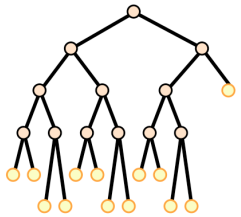


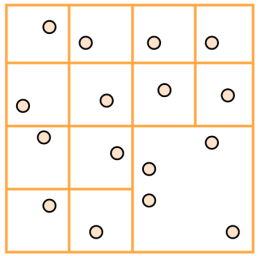
kD-Bäume





kD-Bäume





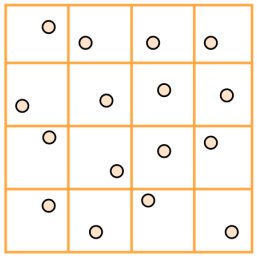
kD-Baum Suche

- Traverse(p,n)
  - if n is a leaf-node then
    - return (dist(p,point[n]), point[n])
  - else
    - if p lies in positive half-space of n then
      - (dist,near) ← Traverse(p,left[n])
    - else
      - (dist,near) ← Traverse(p,right[n])
    - return (dist,near)

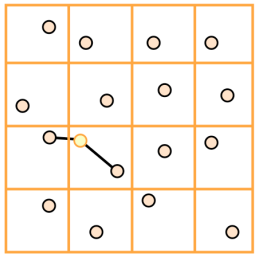
kD-Baum Suche

- Traverse(p,n)
  - if n is a leaf-node then
    - return (dist(p,point[n]), point[n])
  - else
    - if p·normal[n] − offset[n] ⩾ 0 then
      - (dist,near) ← Traverse(p,left[n])
    - else
      - (dist,near) ← Traverse(p,right[n])
    - return (dist,near)

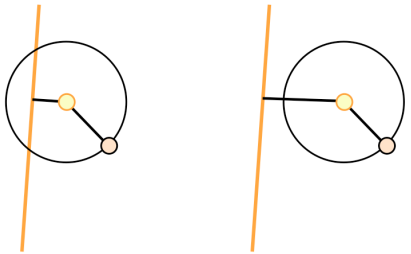
kD-Baum Suche



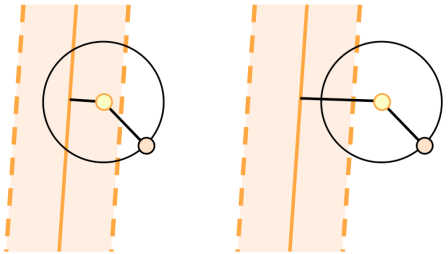
kD-Baum Suche



kD-Baum Suche



kD-Baum Suche



kD-Baum Suche

```
• Traverse(p,dist,near,n)
    if n is a leaf-node then
      if dist(p,point[n]) < dist then
        return (dist(p,point[n]), point[n])
      else
        return (dist, near)
    else
      if p·normal[n] − offset[n] ⩾ −dist then
        (dist,near) = Traverse(p,dist,near,left[n])
      if p·normal[n] − offset[n] ⩽ dist then
        (dist,near) = Traverse(p,dist,near,right[n])
      return (dist,near)
```


Aufwandsabschätzung

- Bei regelmäßig verteilten Datenpunkten ist der erwartete Aufwand O(log n)
- Der Algorithmus funktioniert auch für allgemeinere BSP-Bäume, bei denen in jedem Knoten eine beliebige separierende Ebene definiert wird.

k nächste Punkte

- Geg. Punktmenge $p_1, \ldots, p_n$
- Anfrage: (x,y) [hier: R^2, allg.: R^k]
- Suche die k besten Kandidaten
- Verwalte die aktuell k Besten in einem Heap
- Neue Kandidaten verdrängen die alten

k nächste Punkte

```
• Nearest(p,neighbors,n)
    if n is a leaf-node then
      if dist(p,point[n]) < neighbors.top() then
        remove_top(neighbors)
        add(neigbors, dist(p,point[n]), point[n])
    else
      if p·normal[n] − offset[n] ⩾ −neighbors.top() then
        neighbors ⟵ Traverse(p,neighbors,left[n])
      if p·normal[n] − offset[n] ⩽  neighbors.top() then
        neighbors ⟵ Traverse(p,neighbors,right[n])
    return neighbors
```

Aufwandsabschätzung

- Fast der gleiche Aufwand wie bei der einfachen Suche: $O(\log n \times \log k)$

Range Queries

- Bereichsabfragen
  - Suche alle Punkte in einem Kreis (x,y,r)
  - Suche alle Punkte in einem Intervall $[a,b] \times [c,d]$
  - ...
- Einfache Modifikation des Suchalgorithmus

Range Queries

- Traverse(p,maxdist,n)
  if n is a leaf-node then
    if dist(p,point[n]) < maxdist then
      output point[n]
  else
    if p·normal[n]−offset[n] ⩾ −maxdist then
      Traverse(p,maxdist,left[n])
    if p·normal[n]−offset[n] ⩽ maxdist then
      Traverse(p,maxdist,right[n])

Abstandsdiagramme

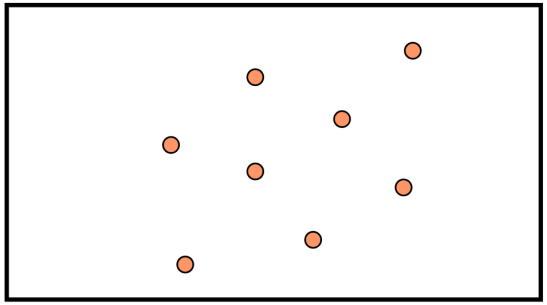
- Bei häufigen Nachbarschafts-Anfragen kann der Zugriff durch Vorberechnung von Abstandsdiagrammen beschleunigt werden
- Diese zerlegen den R^n (hier den R^2) in kleine Bereiche, für die die Nachbarschaften jeweils vorberechnet werden können

Gewünscht: Graph-Datenstruktur, in der jeder Punkt mit seinen (geometrischen) Nachbarn verbunden ist. Dann ist die Suche
an sich wenig komplex. Nur der Aufbau des Graphen ist etwas schwieriger.

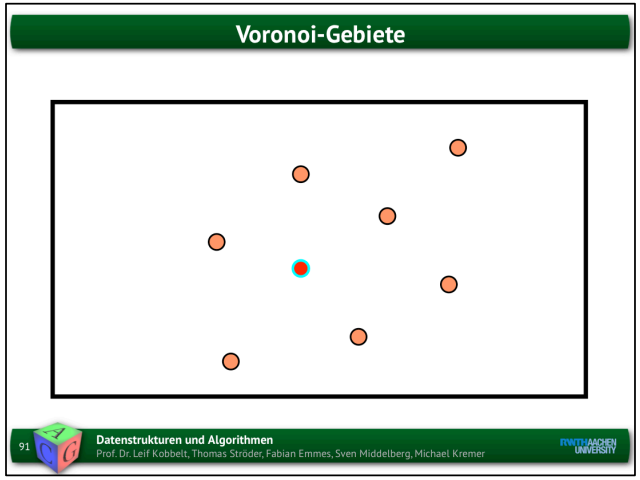
Voronoi-Gebiete

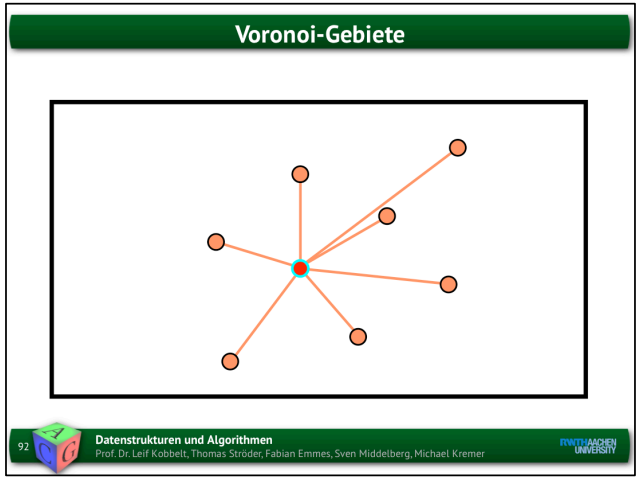
- Geg. Punktmenge $p_1, \ldots, p_n$
- Das **Voronoi-Gebiet** zu einem Punkt p_i enthält den Bereich des R^2, der näher an p_i als an jedem anderen p_j liegt
- $V(p_i) = \{ q \mid \forall\ j \neq i : dist(q,p_i) < dist(q,p_j) \}$

Voronoi-Gebiete

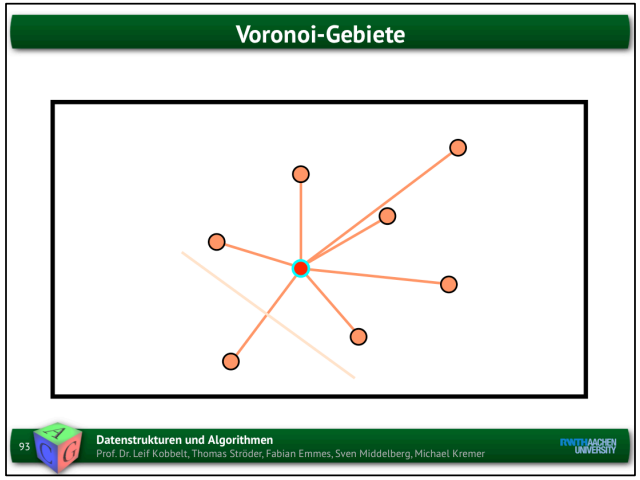


Jeder Punkt soll Informationen darüber haben, was seine Nachbarn sind.
Beispiel: Funkmasten. Für jeden Punkt in der Ebene will man wissen, welcher der geometrisch nächste Funkmast ist,
weil dieser lokal die größte Feldstärke hat.

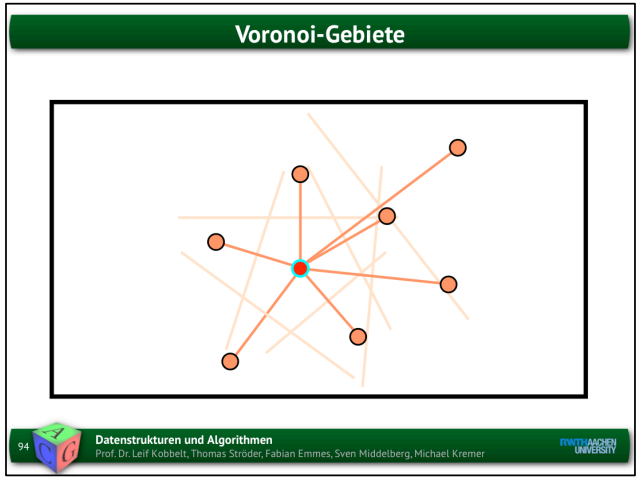




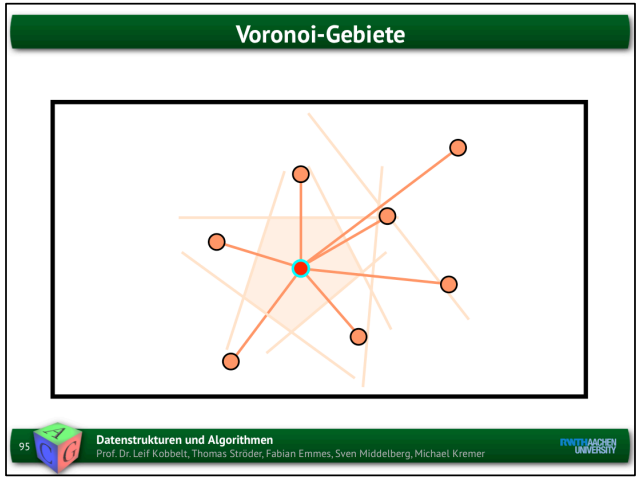
Bilde Gerade zu jedem anderen Punkt.

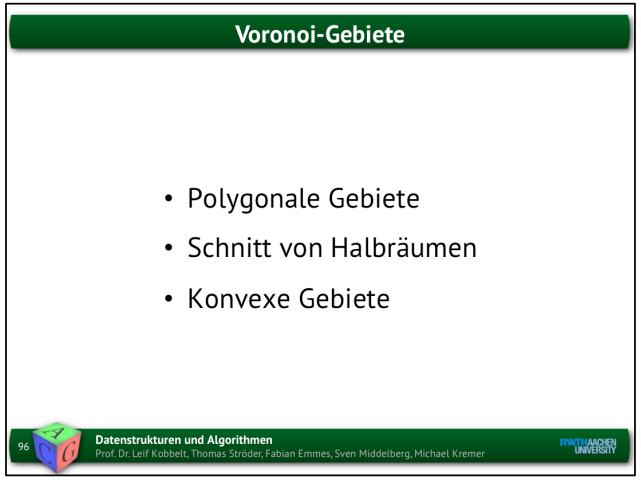


Die Senkrechte teilt den Raum in zwei Halbräume, für die gilt:
Alle Punkte oberhalb der Geraden sind näher am oberen Punkt (rot)
und alle Punkte unterhalb dieser Geraden sind näher zum unteren Punkt.



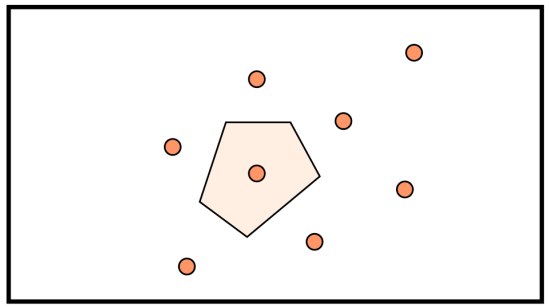
Diese Halbräume bilden wir für alle möglichen Punkte.



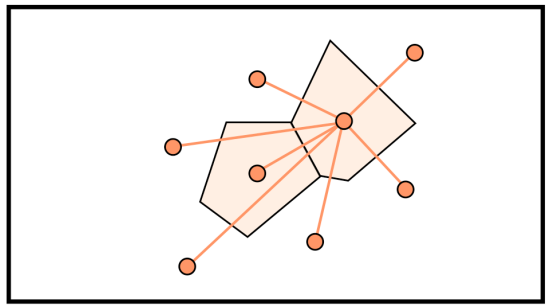


Das Voronoi-Gebiet für den roten Punkt ist dann die Schnittmenge aller Halbräume der adjazenten Punkte.
Da ein Halbraum immer konvex ist, ist der Schnitt zweier Halbräume auch konvex.
Daraus folgt, dass eine
Voronoi-Zelle (-Gebiet) immer konvex ist.

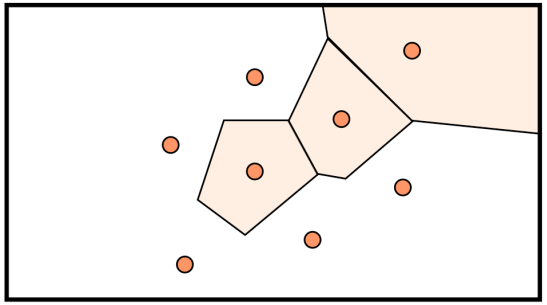
Voronoi-Diagramm



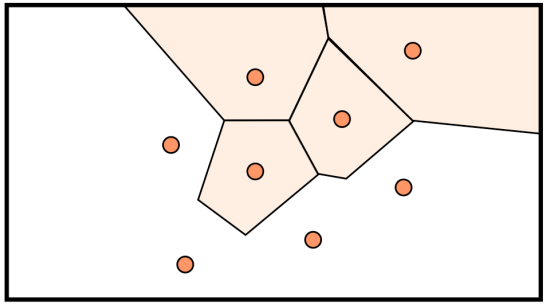
Voronoi-Diagramm



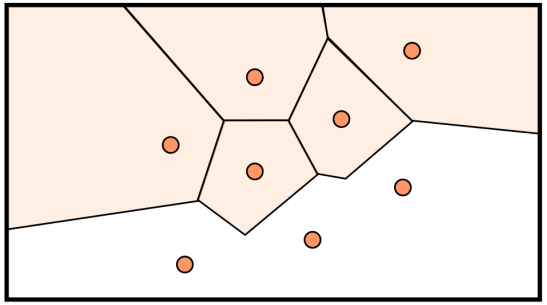
Voronoi-Diagramm



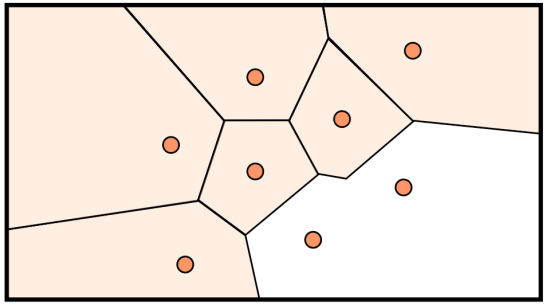
Voronoi-Diagramm

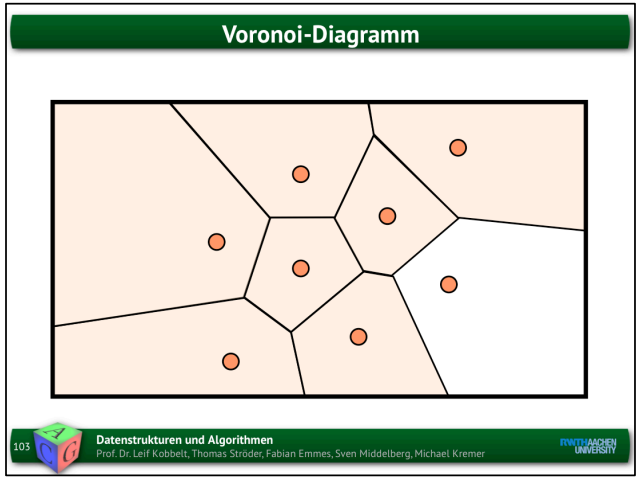


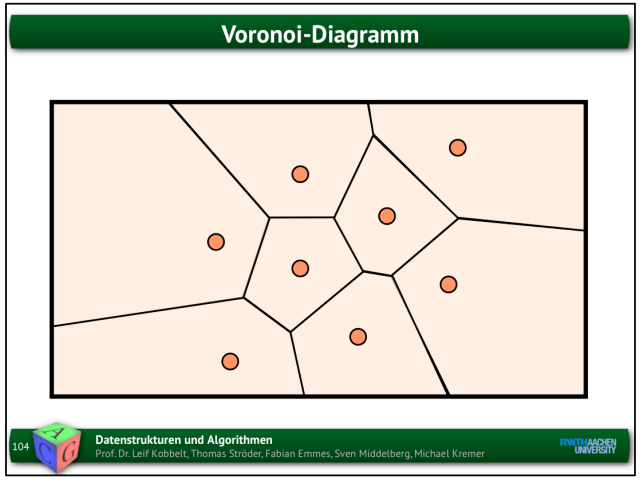
Voronoi-Diagramm



Voronoi-Diagramm





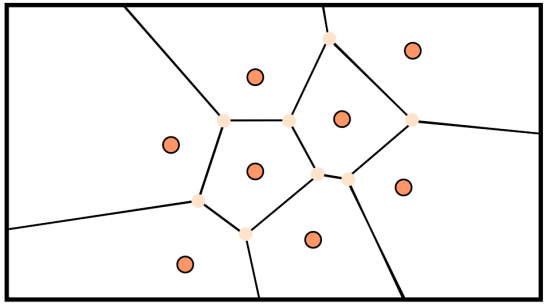


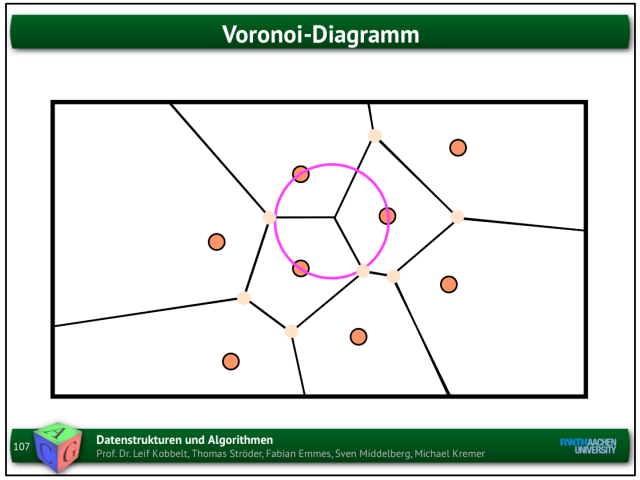
Die Menge aller Voronoi-Zellen (Voronoi-Diagramm). Nun kann man schnell bestimmen, zu welchem der orangenen Punkte ein beliebiger Punkt in dieser Ebene am nächsten ist.

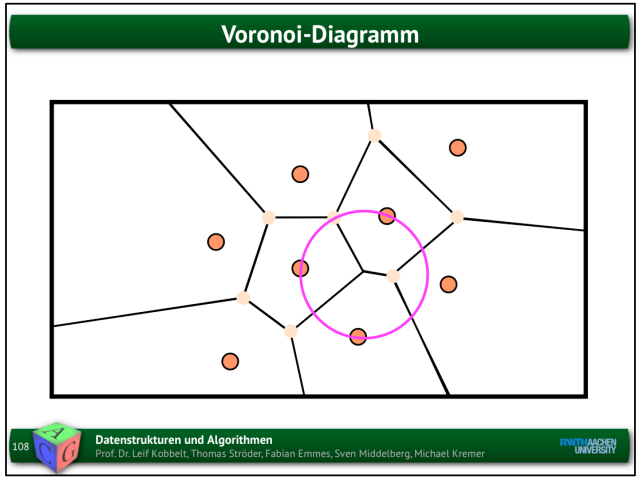
Voronoi-Diagramm

- Ein VD ist eine (planare) Graph-Struktur, die den R^2 in konvexe Regionen unterteilt
- Die Voronoi-Kanten liegen auf den Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken
- Im allg. Treffen an einem Voronoi-Vertex genau 3 Kanten zusammen
- Voronoi-Vertices sind Umkreismittelpunkte

Voronoi-Diagramm

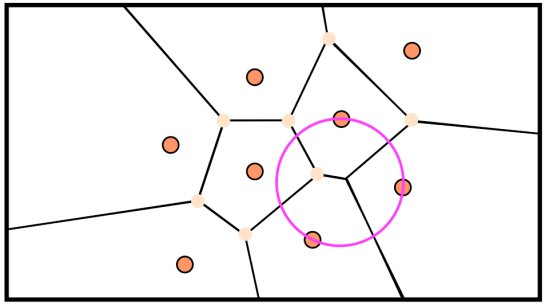




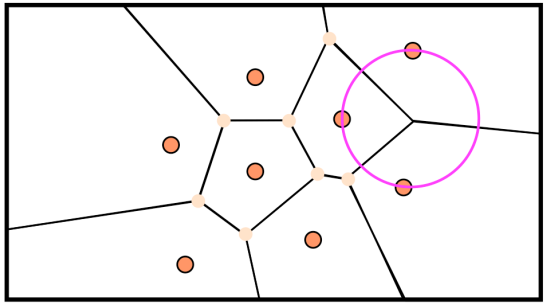


An den Eckpunkten des Diagramms schneiden sich immer genau drei Kanten. Diese Eckpunkte
bilden den Mittelpunkt eines Kreises, auf dem die drei umgebenen (orangenen) Punkte liegen. Es gibt den Spezialfall, in dem ein solcher
Eckpunkt Valenz vier hat. In diesem Fall liegen alle vier umgebenen Punkte auf einem Kreis mit dem Eckpunkt als Mittelpunkt.

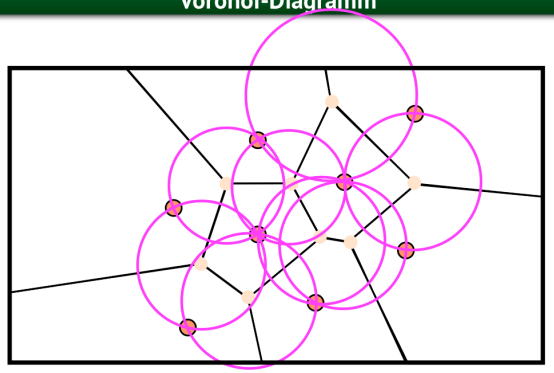
Voronoi-Diagramm



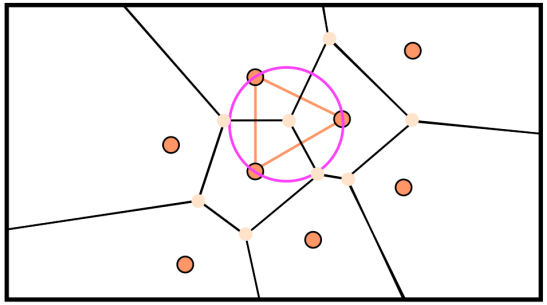
Voronoi-Diagramm



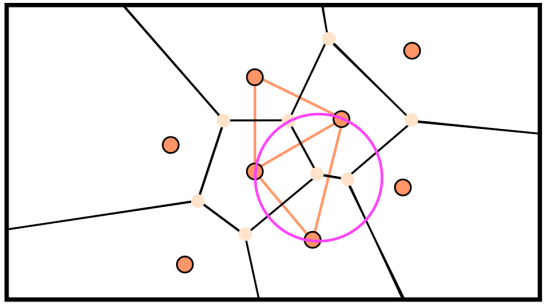
Voronoi-Diagramm



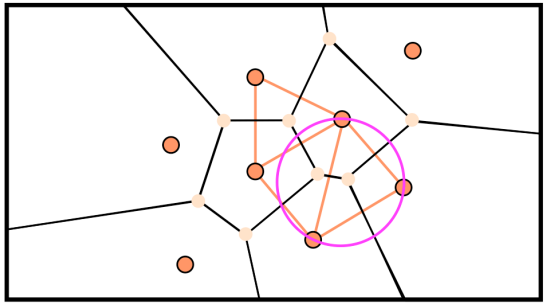
Voronoi-Diagramm

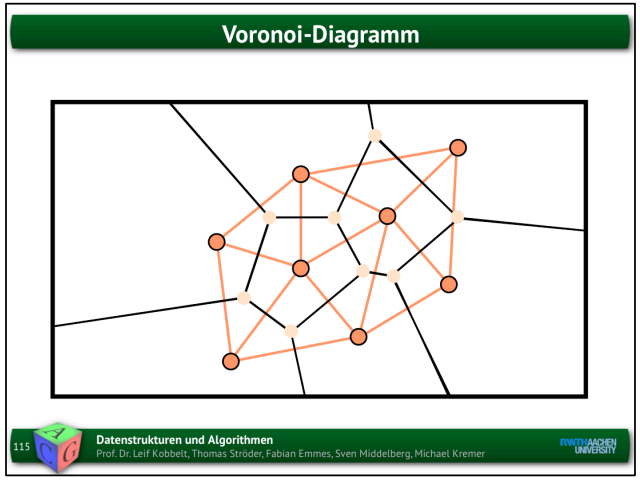


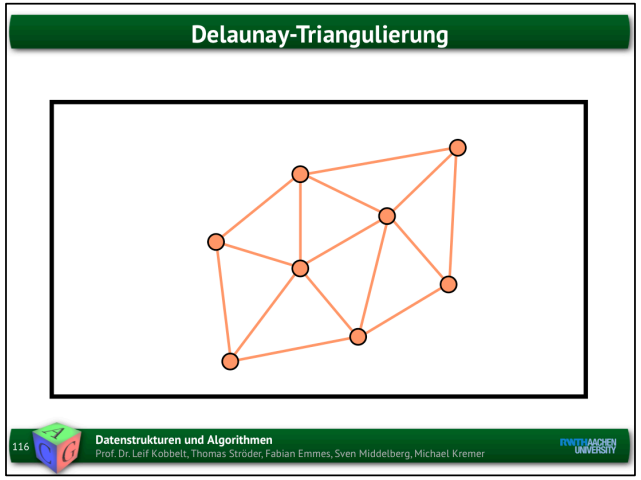
Voronoi-Diagramm



Voronoi-Diagramm





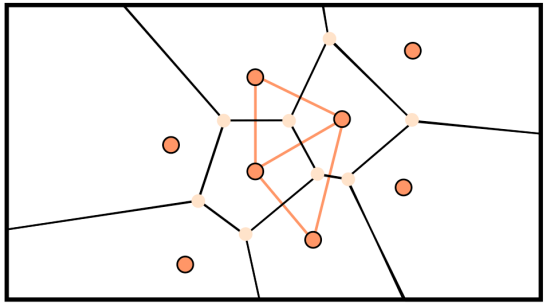


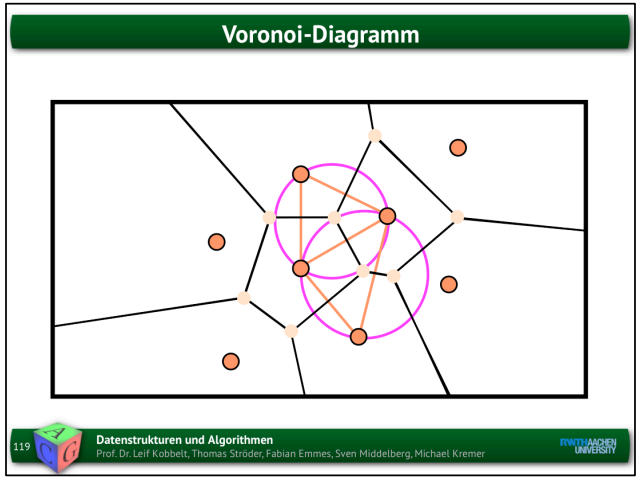
Die Delaunay-Triangulierung wird gebildet, in dem je zwei benachbarte Punkte durch eine
Kante verbunden werden. Diese Triangulierung und das Voronoi-Diagramm sind dementsprechend dual zueinander.

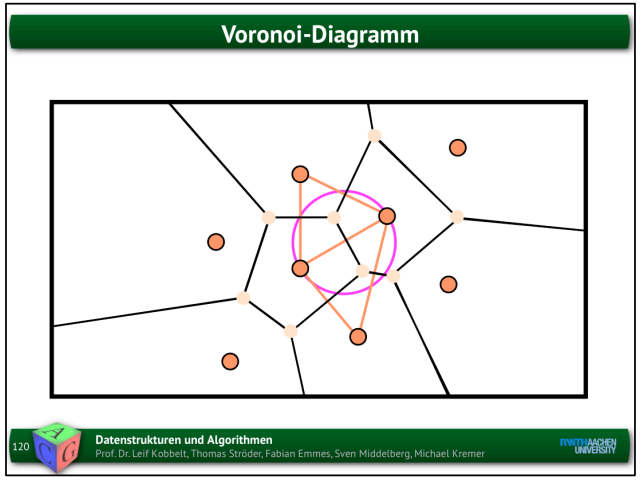
Delaunay-Triangulierung

- Eigenschaften (1):
  - Dualer Graph zum Voronoi-Diagramm
  - Zerlegt die konvexe Hülle der Punkte in disjunkte Dreiecke (mit den p_i als Ecken)
  - Die Region innerhalb eines Dreiecks ist einem der drei Eckpunkte am nächsten
  - Der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen weiteren Punkt p_j

Voronoi-Diagramm







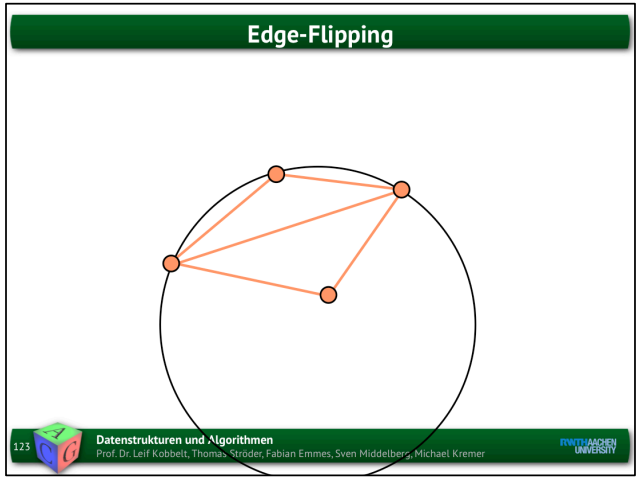
Diese Kreise (die je drei Punkte schneiden) enthalten keinen weiteren orangenen Punkt.

Delaunay-Triangulierung

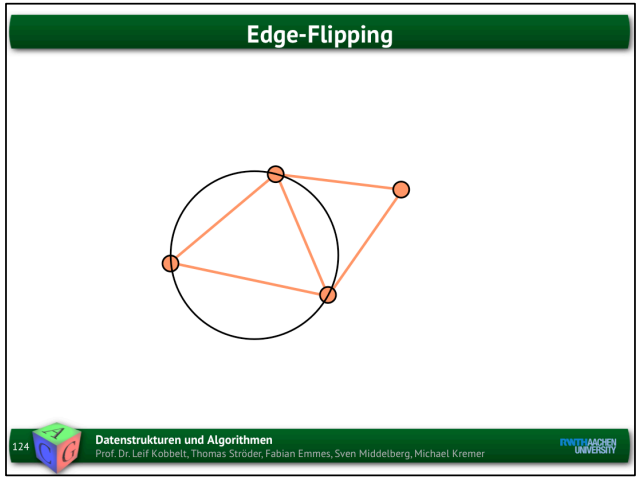
- Eigenschaften(2):
  - Der Umkreis jeder Kante enthält keinen weiteren Punkt p_j
  - Die DT ist eindeutig definiert
  - Maximaler minimaler Innenwinkel
  - Einfacher zu handhaben als VD, da keine allg. Graph-Struktur verarbeitet werden muß

Delaunay-Triangulierung

- Inkrementeller Algorithmus zur Erzeugung ...
  - Für nur drei Punkte p_1,p_2,p_3 trivial
  - Füge weitere Punkte $p_4,\ldots$ ein und stelle die Delaunay-Eigenschaften wieder her

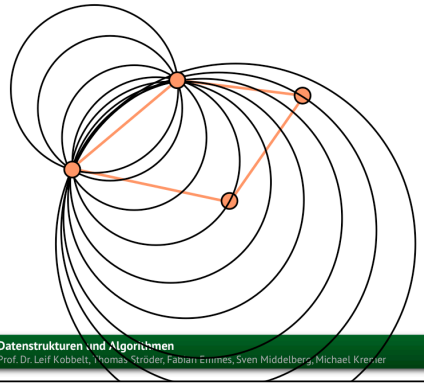


Kreis, der drei Punkte schneidet, enthält einen weiteren Punkt im Inneren. => Delaunay-Eigenschaft nicht erfüllt.
Reparieren durch Edge-Flip.



Nun ist die Delaunay-Eigenschaft wieder erfüllt.

Edge-Flipping



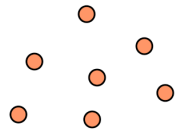
Kreisschar, die zwei Punkte schneidet und monoton größer wird zu beiden Seiten.

Inkrementeller Algorithmus

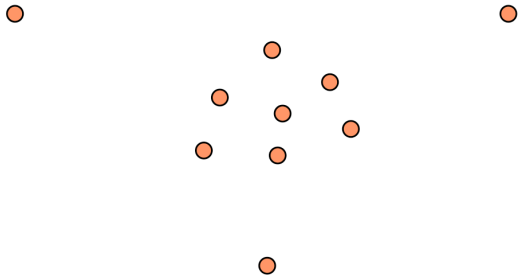
- Geg: Punktmenge $p_1,p_2,\ldots,p_n$
- Zur Vermeidung von Spezialfällen:
  Ergänze drei zusätzliche Punkte
  q_1,q_2,q_3,
  so dass alle p_i innerhalb des Dreiecks $[q_1,q_2,q_3]$ liegen ⇒ Einfügen nur im Inneren
- q_1,q_2,q_3 können leicht entfernt werden

Man fügt drei Hilfspunkte außerhalb der Punktwolke ein, so dass sie ein Dreieck bilden, das alle Punkte der Punktwolke enthält.
Dann wird inkrementell unterteil...

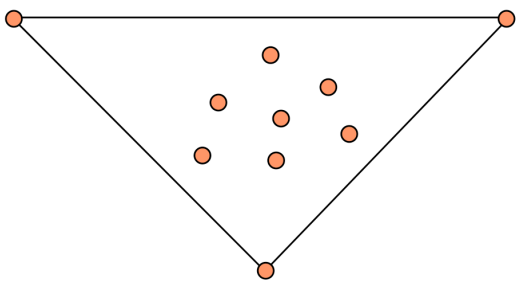
Inkrementeller Algorithmus



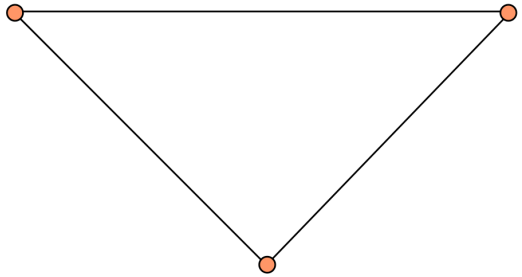
Inkrementeller Algorithmus

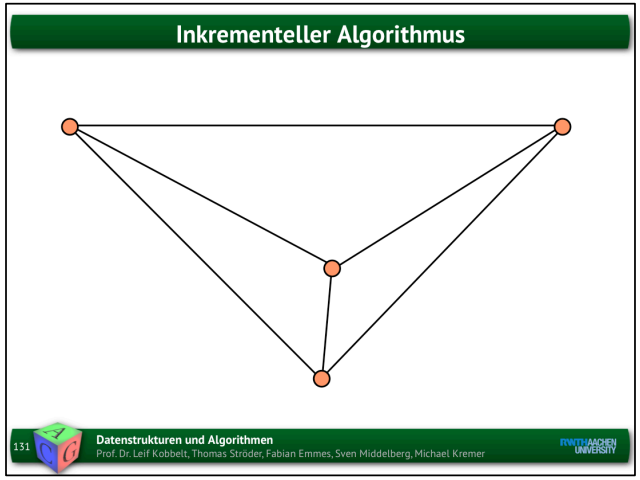


Inkrementeller Algorithmus

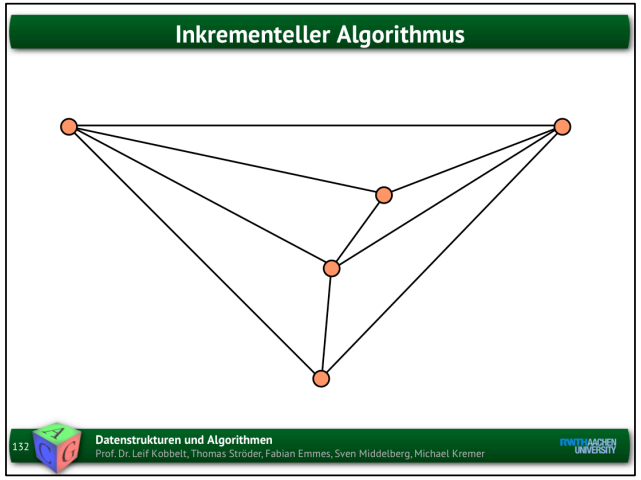


Inkrementeller Algorithmus

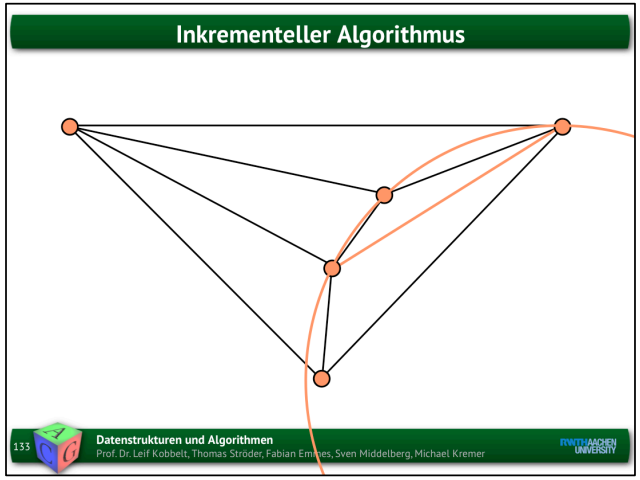




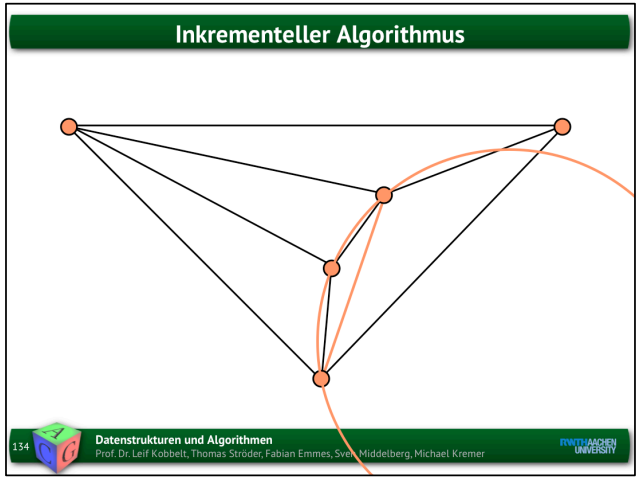
Es wird für jedes neu hinzugekommene Dreieck geprüft, ob Delaunay-Eigenschaft erfüllt ist. Hier ist sie erfüllt.



Hier nicht.

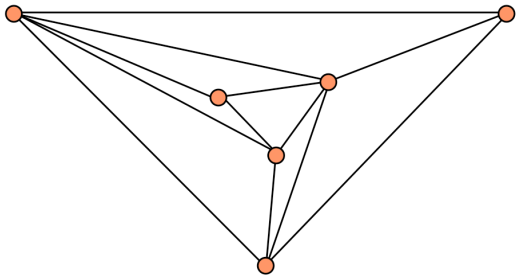


Die orangene Kante muss geflippt werden.

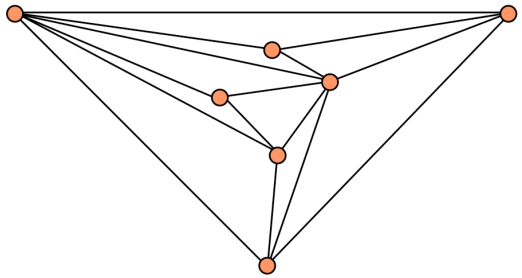


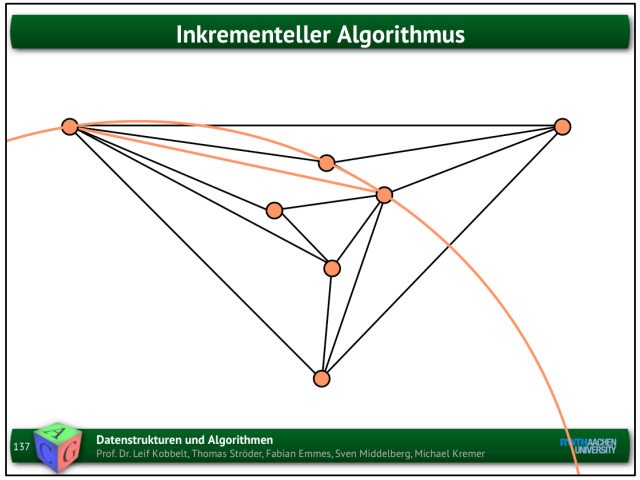
Delaunay-Eigenschaft wiederhergestellt.

Inkrementeller Algorithmus

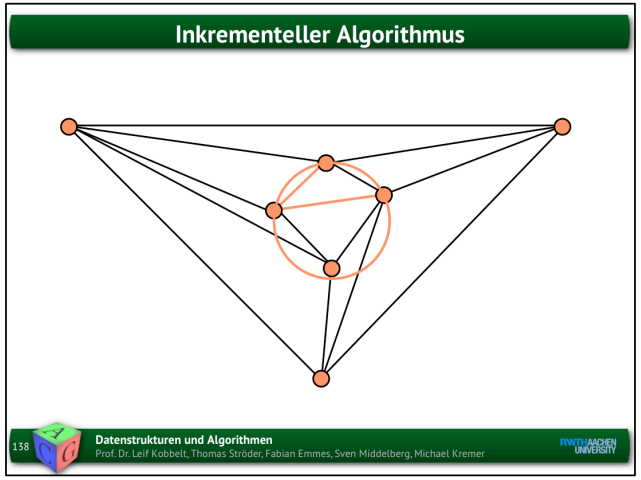


Inkrementeller Algorithmus



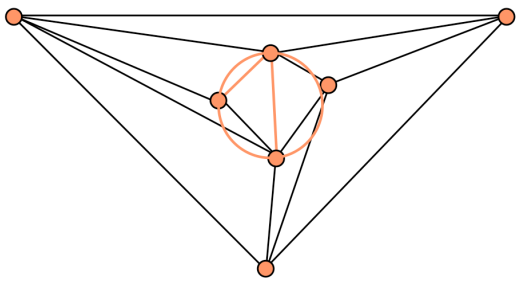


D.-Eig. wieder verletzt. Kanten-Flip.

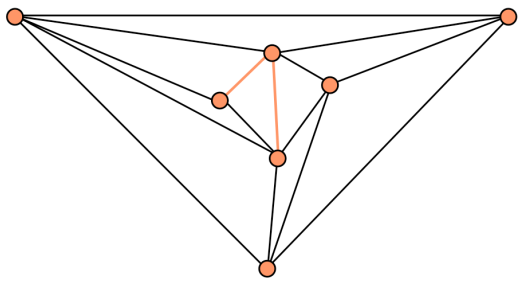


Und so weiter...

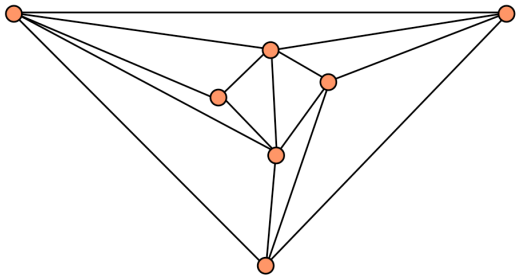
Inkrementeller Algorithmus



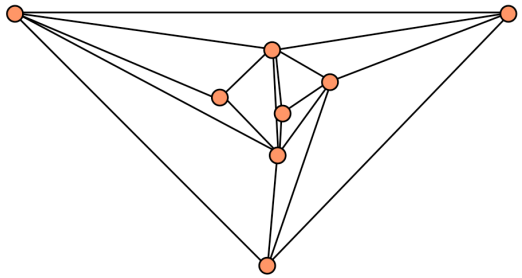
Inkrementeller Algorithmus



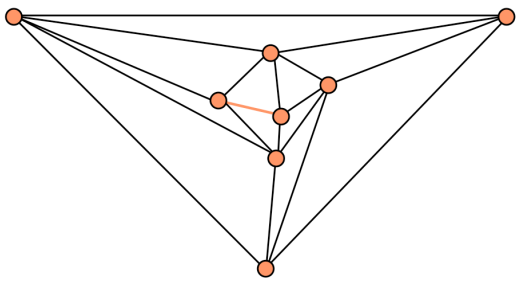
Inkrementeller Algorithmus



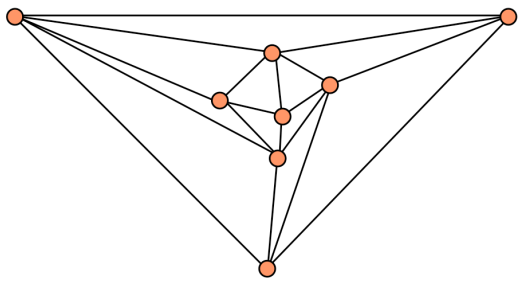
Inkrementeller Algorithmus

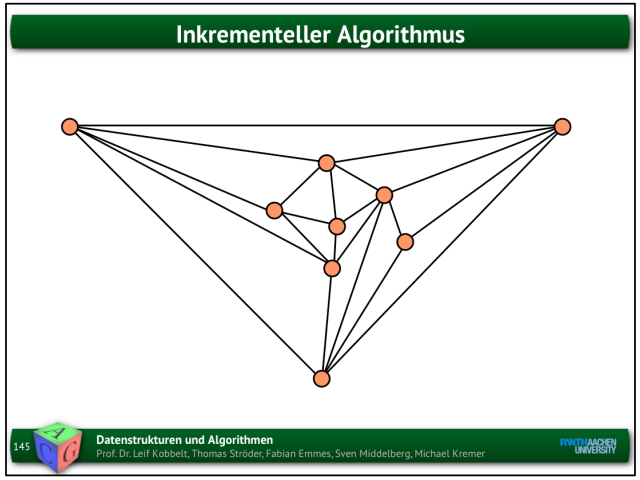


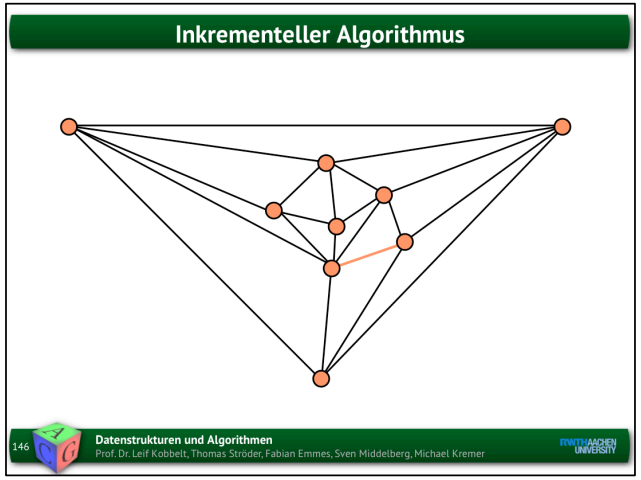
Inkrementeller Algorithmus



Inkrementeller Algorithmus

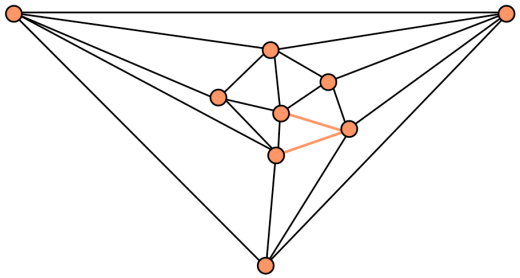




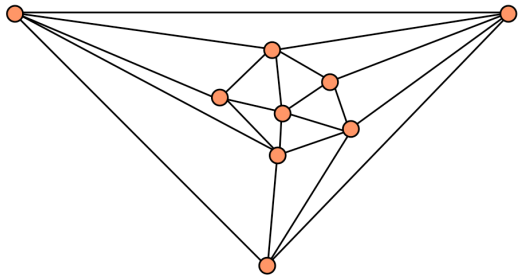


Jeder Punkt, der hinzugefügt wird, hat die Valenz drei, da er immer im Inneren eines Dreiecks hinzugefügt wird.

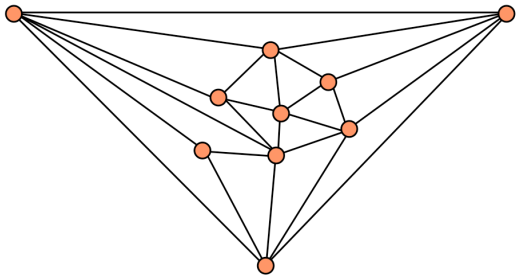
Inkrementeller Algorithmus



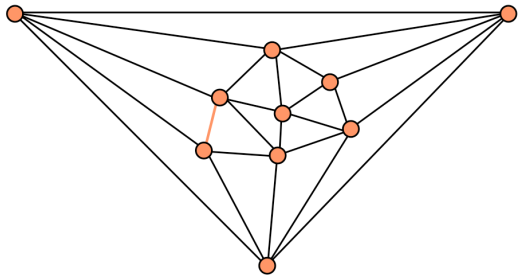
Inkrementeller Algorithmus



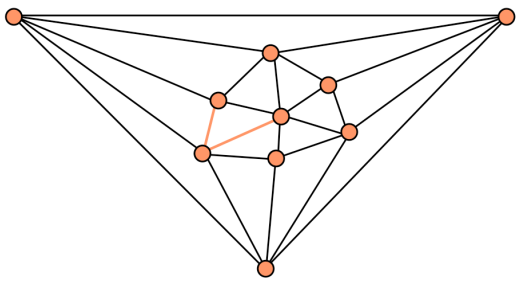
Inkrementeller Algorithmus



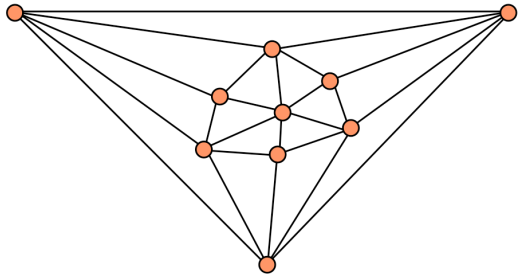
Inkrementeller Algorithmus



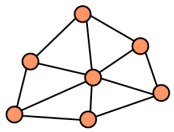
Inkrementeller Algorithmus



Inkrementeller Algorithmus



Inkrementeller Algorithmus



Am Ende schmeißt man die drei Hilfspunkte inkl. inzidenter Kanten wieder weg und ist fertig mit der Delaunay-Triangulierung.
Man könnte mit Hilfe dieses Algorithmus auch abschätzen, wieviele Dreiecke eine Punktwolke, die 1 Mio. Vertices enthält,
beinhaltet. Für jeden Vertex, den wir neu hinzufügen, werden zwei neue Dreiecke dem Graphen hinzugefügt. Daraus
ergibt sich, dass die Anzahl der Dreiecke in einem Dreiecksnetz ungefähr doppelt so groß ist, wie die Anzahl der
Vertices.

Inkrementeller Algorithmus

- Für jeden Punkt p_i — O(n)
  - Suche das entsprechende Dreieck — O(n)
  - Füge den neuen Punkt ein — O(1)
  - Flippe Kanten bis die Delaunay-Bedingungen wieder hergestellt sind. — O(k)

k konstant und unabhängig von der Komplexität des Netzes.

Aufwandsabschätzung

- Der maximale Knotengrad k (Valenz) kann normalerweise als beschränkt angenommen werden (zumindest als unabhängig von n)
- Gesamtaufwand $O(n^2)$
- Beschleunigung durch bessere Suche

Beschleunigte Suche

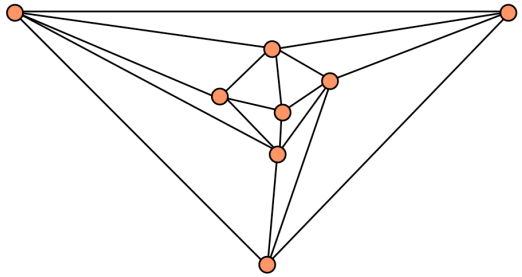
- Standard Ansatz:
  Verwalte die Dreiecke in einem Suchbaum, um schneller auf die Elemente zuzugreifen
- Verbesserung: $O(\log n)$ statt $O(n)$

Leider trotzdem ein Gesamtaufwand von O(n^2), da für jeden Punkt sein zugehöriges Dreieck gesucht werden muss.
Dies können wir noch beschleunigen.

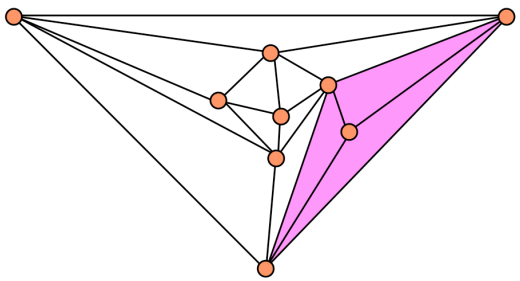
Beschleunigte Suche

- Am Anfang existiert nur ein Dreieck
- Bei jedem Einfügeschritt werden m Dreiecke entfernt und m+2 Dreiecke ergänzt

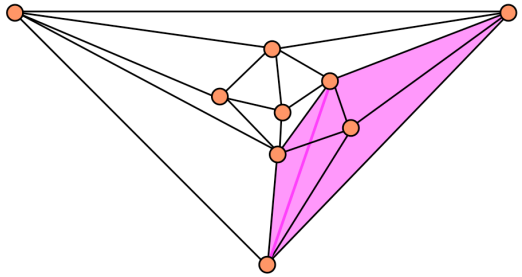
Inkrementeller Algorithmus



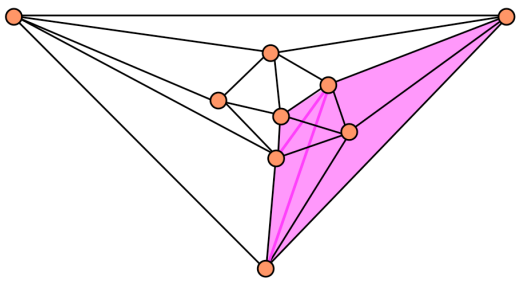
Inkrementeller Algorithmus



Inkrementeller Algorithmus



Inkrementeller Algorithmus

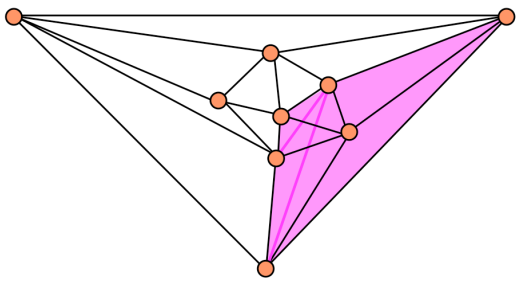


Beschleunigte Suche

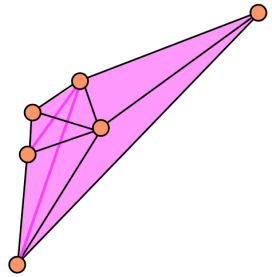
- Am Anfang existiert nur ein Dreieck
- Bei jedem Einfügeschritt werden m Dreiecke entfernt und $m+2$ Dreiecke ergänzt
- $m+2 \leqslant k$ ... die maximale Valenz
- $m+2 : m \geqslant c > 1$ ... minimaler Verfeinerungsfaktor

k = maximale Valenz im Graphen (i.d.R. beschränkt durch konstante Zahl).
Der unten stehende Quotient besagt, dass die Anzahl der Dreiecke im Graphen streng monoton wächst.

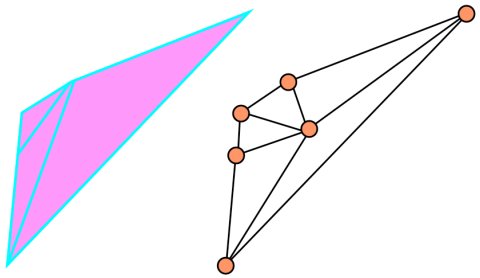
Inkrementeller Algorithmus



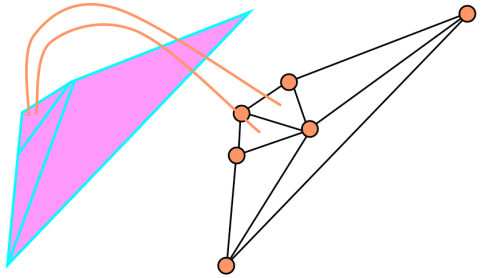
Inkrementeller Algorithmus

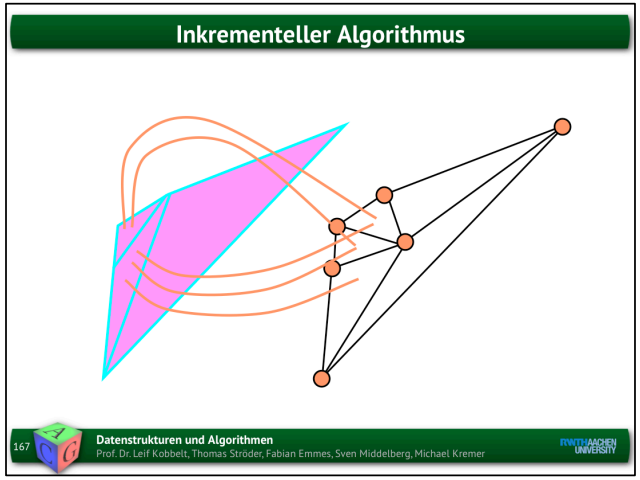


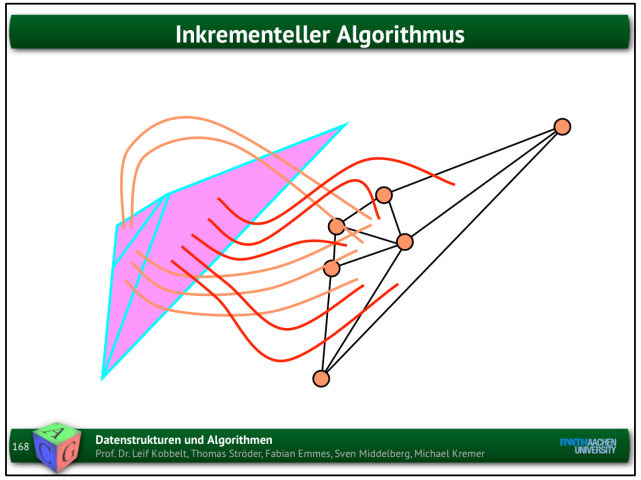
Inkrementeller Algorithmus



Inkrementeller Algorithmus







Bilde Baum mit Mapping von allen Dreiecken auf das übergeordnete Dreieck der jeweils gröberen Triangulierung.
Das große Hilfsdreieck vom Anfang bildet dabei die Wurzel.

Suchbaum für Dreiecke

- Seien die Dreiecke, die im Laufe des Algorithmus generiert werden die Knoten des Suchbaumes
- Durch den minimalen Verfeinerungsfaktor $m+2 : m \geq c > 1$ ist garantiert, dass die Anzahl von Knoten von Level zu Level exponentiell steigt

Suchbaum für Dreiecke

- Obwohl diese Datenstruktur keinen (zyklenfreien) Baum darstellt, ergibt sich trotzdem ein gerichteter Graph, dessen Pfade maximal logarithmische Länge haben, wenn die Punkte hinreichend gleichmäßig verteilt sind (und die maximale Valenz beschränkt ist).
- Kosten:
  - Aufbau des Baumes $O(n)$
  - Suche im Baum $O(\log n)$

Inkrementeller Algorithmus

- Für jeden Punkt p_i — O(n)
  - Suche das entsprechende Dreieck — O(log n)
  - Füge den neuen Punkt ein — O(1)
  - Flippe Kanten bis die Delaunay-Bedingungen wieder hergestellt sind. — O(k)
  - Gesamtaufwand: O(n log n)