2.6 Graphen

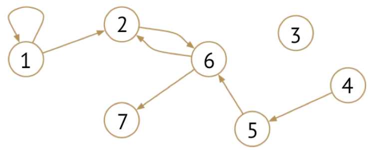
Definition

- Gerichteter Graph $G=(V,E)$
  - V : Knoten, Vertices
  - E : Kanten, Edges
- mit $\#V < \infty$ und $E \subseteq V \times V$

gerichtet => Relation E nicht symmetrisch!

Beispiel

- V = {1,2,3,4,5,6,7}
- E = {(1,1),(1,2),(2,6),(6,2),(6,7),(5,6),(4,5)}



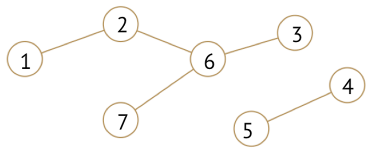
Definition

- Ungerichteter Graph G=(V,E)
  - V : Knoten, Vertices
  - E : Kanten, Edges
- mit $\#V < \infty$ und $E \subseteq V \times V$ symmetrisch

Bei einem ungerichteten Graphen sind die Kantenrelationen stets symmetrisch.

Beispiel

- V = {1,2,3,4,5,6,7}
- E = {(1,2),(2,1),(2,6),(6,2),(6,7),(7,6),(3,6), (6,3), (5,4),(4,5)}



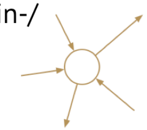
Definition

- Konvention: Ist keine Verwechslung zu befürchten, so bezeichnen wir die Zahl #V der Knoten bzw. #E der Kanten einfach mit V bzw. E
- Wir nennen
  Adj[u] = { v : (u,v) ∈ E }
  die Nachbarn von u

„Adj" steht für Adjazenz. „adiaceo" Lateinisch für „benachbart sein".

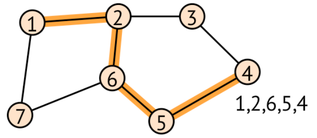
Grad

- Der Eingangs-/Ausgangsgrad eines Knotens k ist die Zahl der auf k hin-/ von k weggerichteten Kanten
- Ungerichteter Graph:
  - E ist symmetrisch
  - Eingangsgrad = Ausgangsgrad = Grad = Zahl der Nachbarn



Wege

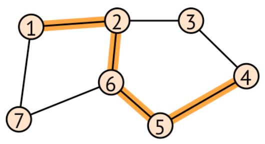
- Ein Weg oder Pfad der Länge k vom Knoten u zum Knoten v ist eine Sequenz $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ von Knoten mit
  - $u = v_0$, $v = v_k$
  - $(v_{i-1}, v_i) \in E$ für $i = 1,2,\ldots,k$



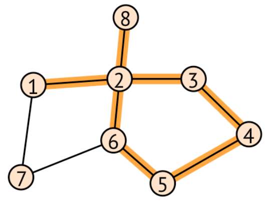
Wege

- Ein Weg heißt einfach, wenn alle seine Knoten verschieden sind.

1,2,6,5,4



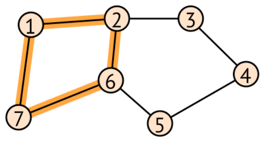
1,2,3,4,5,6,2,8



Wege

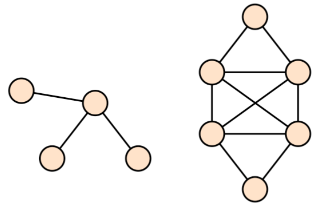
- Ein Weg $v_0,\dots,v_k$ mit $v_0 = v_k$ heißt Zyklus (gerichtete Graphen) bzw. Kreis (ungerichtete Graphen)

1,2,6,7,1



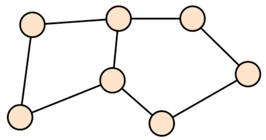
Wege

- Ein Eulerkreis eines ungerichteten Graphen ist ein Kreis, der jede Kante genau einmal enthält.
- Wann existiert ein Eulerkreis?



Wege

- Ein Hamiltonkreis eines ungerichteten Graphen ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält.
- Traveling Salesman Problem

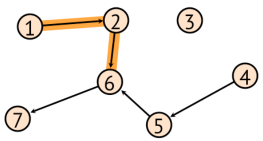


Wege

- Ein Knoten v ist von einem Knoten u erreichbar, u → v, wenn es einen Weg von u nach v gibt.

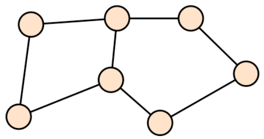
1→ 6, aber nicht 6 →1

Isolierter Knoten:
Grad = 0



Zusammenhang

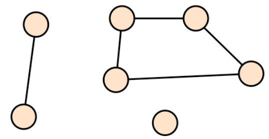
- Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn jedes Knotenpaar durch einen Weg verbunden ist.



zusammenhängend

Zusammenhang

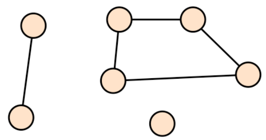
- Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn jedes Knotenpaar durch einen Weg verbunden ist.



nicht zusammenhängend

Zusammenhang

- Die Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen sind die Äquivalenzklassen der Relation "$\rightarrow$"
- Zeige: Für ungerichtete Graphen ist $\rightarrow$ eine Äquivalenzrelation



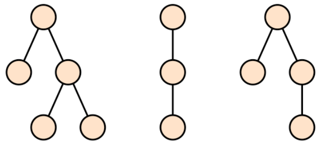
3 Zusammenhangskomponenten

Zusammenhang

- Ein gerichteter Graph heißt schwach, stark, einseitig zusammenhängend, wenn …

Bäume

- Ein ungerichteter Graph G heißt Wald, falls G keinen Kreis enthält.
- Ist G zusätzlich zusammenhängend, so heißt G ein Baum.
- Ein Wald besteht aus Bäumen.



Bäume

- Für einen Baum (V,E) gilt E = V−1
- Sei G=(V,E) ein Wald mit k Bäumen, Baum i habe n_i Knoten und m_i Kanten. Dann gilt:

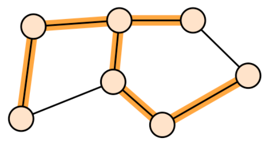
$$E = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i-1}^{k} n_i - k = V - k$$

- Folge: Ein Graph G=(V,E) mit k Zusammenhangskomponenten enthält genau dann einen Kreis, wenn

E > V−k

Spannbaum

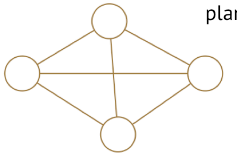
- Ein Spannbaum zu einem Graphen G=(V,E) ist ein Baum (V,E') mit E' ⊆ E



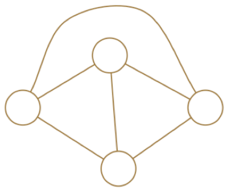
20 Datenstrukturen und Algorithmen
Prof. Dr. Leif Kobbelt, Thomas Ströder, Fabian Emmes, Sven Middelberg, Michael Kremer

Spezielle Graphen

- Ein Graph G=(V,E) heißt planar, wenn er sich überschneidungsfrei in der Ebene abbilden lässt.



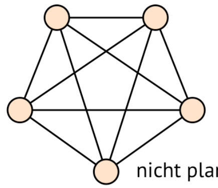
planar, denn



Spezielle Graphen

- Ein ungerichteter Graph G=(V,E) heißt vollständig, falls E = V × V.

K_5

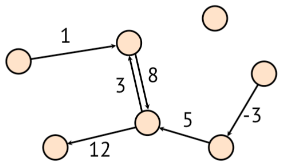


nicht planar

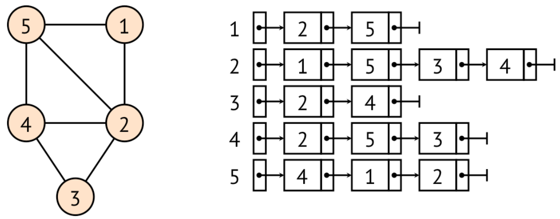
D.h., jeder Knoten ist mit jedem anderen Knoten verbunden.

Gewichtete Graphen

- Zu einem gewichteten Graph G=(V,E) gehört eine Gewichtsfunktion w : E→R, die jeder Kante e ein Gewicht w(e) zuordnet.

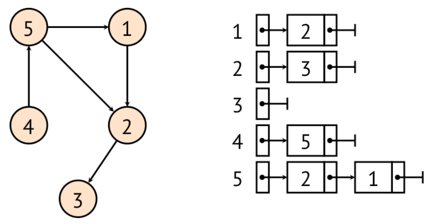


Adjazenzlisten

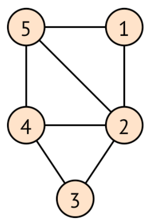


Die Nachbarschaften eines jeden Knoten werden in einer Liste gespeichert.

Adjazenzlisten



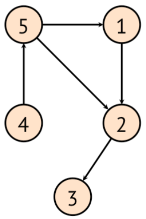
Adjazenzmatrizen



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Der Eintrag i,j in der Matrix ist 1, gdw. es eine Kante zwischen Knoten i und j gibt.
Anstatt eines binären Werts (verbunden oder nicht), kann man auch die Kantengewichte
als Koeffizienten der Matrix nehmen.
Diese Matrix ist symmetrisch für ungerichtete Graphen, i.d.R. aber nicht symmetrisch für gerichtete Graphen.

Adjazenzmatrizen



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0

Speicheraufwand

- Adjazenzlisten: $O(V+E)$
- Adjazenzmatrizen: $O(V^2)$
- Ist nichts anderes angegeben, so verwenden die nachfolgend vorgestellten Algorithmen Adjazenzlisten zur Darstellung der Graphen.