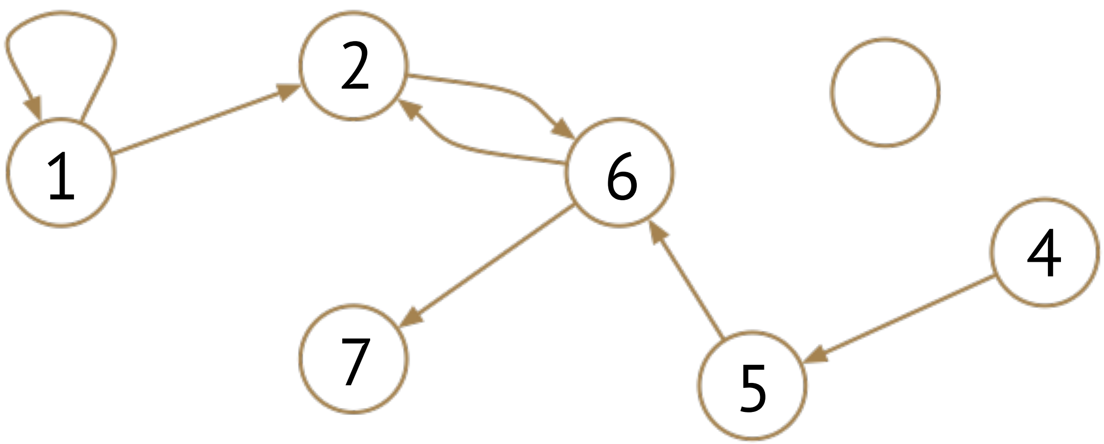
2.6 Graphen

Definition

- Gerichteter Graph $G=(V,E)$
  - V : Knoten, Vertices
  - E : Kanten, Edges
- mit $\#V < \infty$ und $E \subseteq V \times V$

Beispiel

- $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $E = \{(1,1),(1,2),(2,6),(6,2),(6,7),(5,6),(4,5)\}$

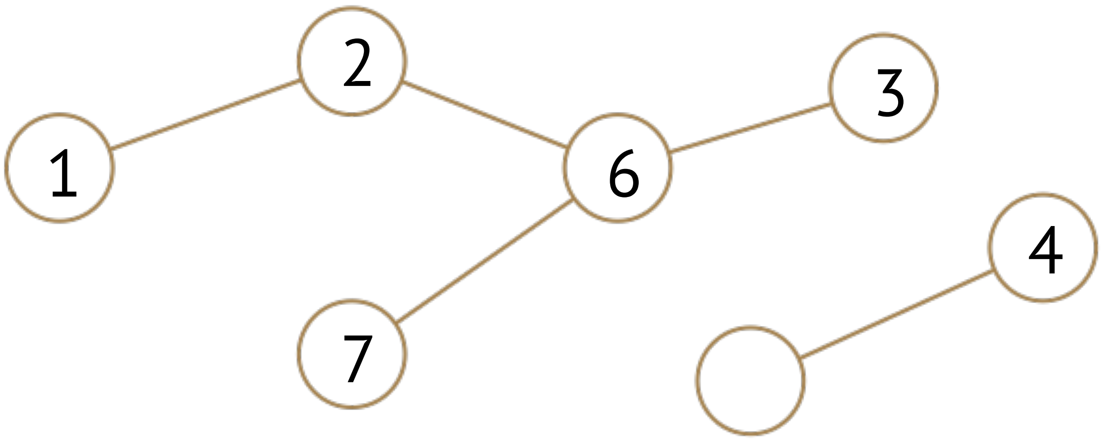


Definition

- Ungerichteter Graph $G=(V,E)$
  - V : Knoten, Vertices
  - E : Kanten, Edges
- mit $\#V < \infty$ und $E \subseteq V \times V$ symmetrisch

Beispiel

- V = {1,2,3,4,5,6,7}
- E = {(1,2),(2,1),(2,6),(6,2),(6,7),(7,6),(3,6),(6,3), (5,4),(4,5)}

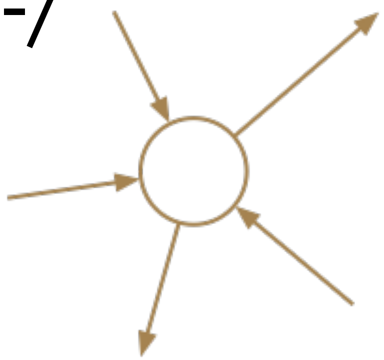


Definition

- Konvention: Ist keine Verwechslung zu befürchten, so bezeichnen wir die Zahl $\#V$ der Knoten bzw. $\#E$ der Kanten einfach mit V bzw. E
- Wir nennen
  $Adj[u] = \{ v : (u,v) \in E \}$
  die Nachbarn von u

Grad

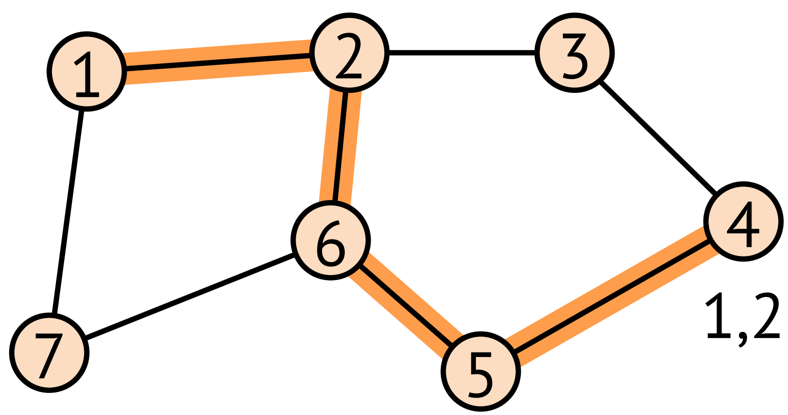
- Der Eingangs-/Ausgangsgrad eines Knotens k ist die Zahl der auf k hin-/von k weggerichteten Kanten



- Ungerichteter Graph:
  - E ist symmetrisch
  - Eingangsgrad = Ausgangsgrad = Grad = Zahl der Nachbarn

Wege

- Ein Weg oder Pfad der Länge k vom Knoten u zum Knoten v ist eine Sequenz $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ von Knoten mit
  - $u = v_0$, $v = v_k$
  - $(v_{i-1}, v_i) \in E$ für $i = 1, 2, \ldots, k$

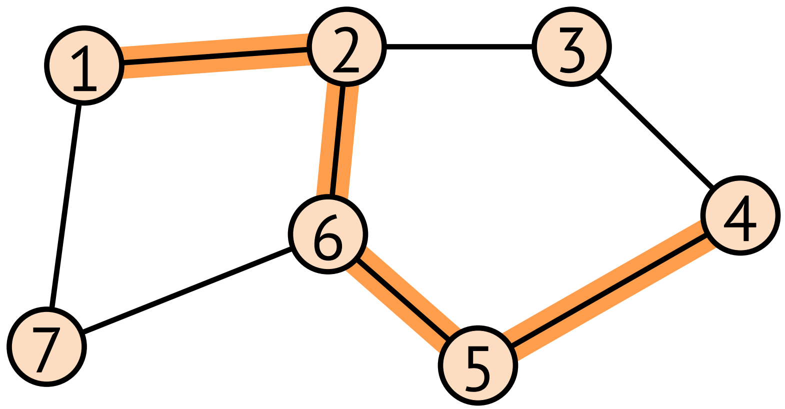


1,2,6,5,4

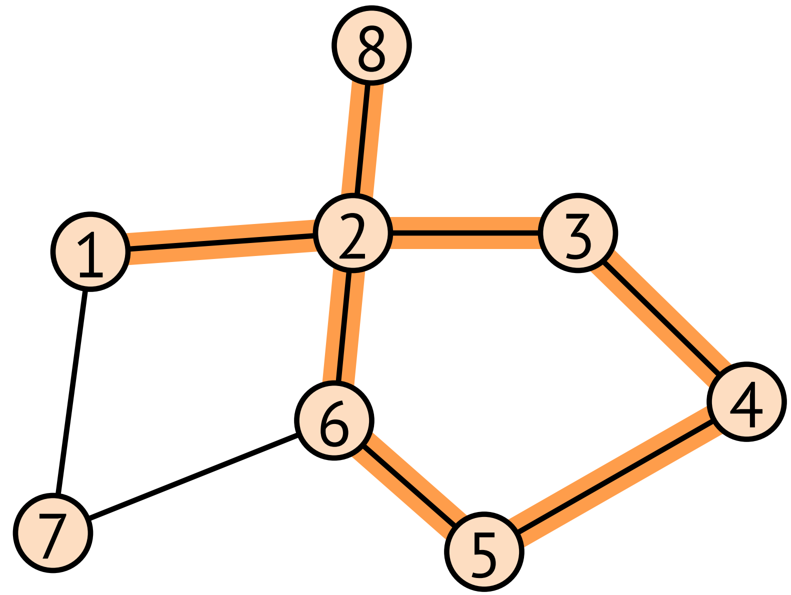
Wege

- Ein Weg heißt einfach, wenn alle seine Knoten verschieden sind.

1,2,6,5,4



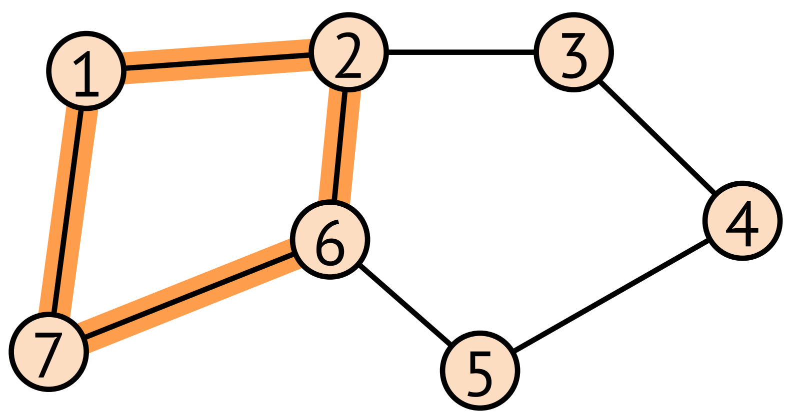
1,2,3,4,5,6,2,8



Wege

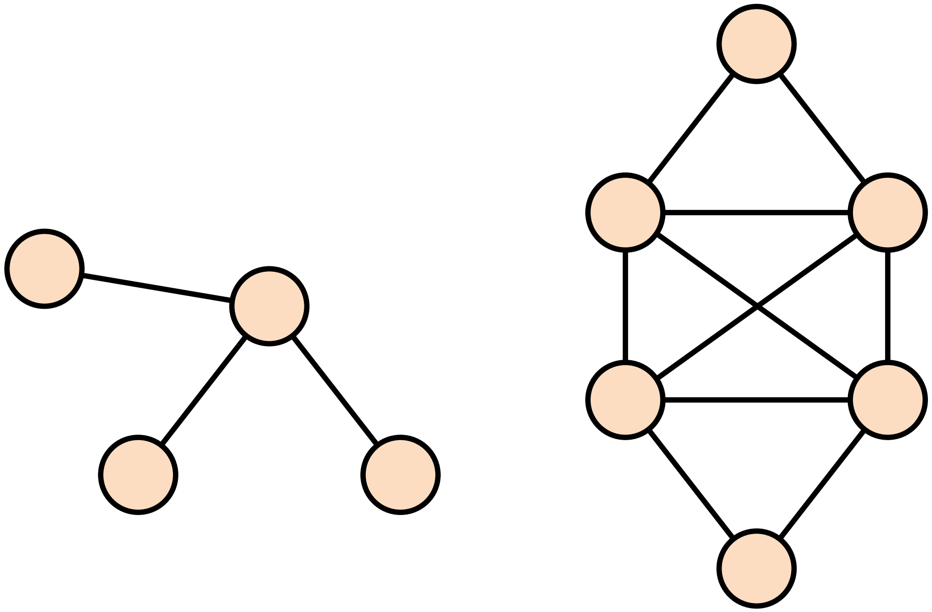
- Ein Weg $v_0,\ldots,v_k$ mit $v_0 = v_k$ heißt Zyklus (gerichtete Graphen) bzw. Kreis (ungerichtete Graphen)

1,2,6,7,1



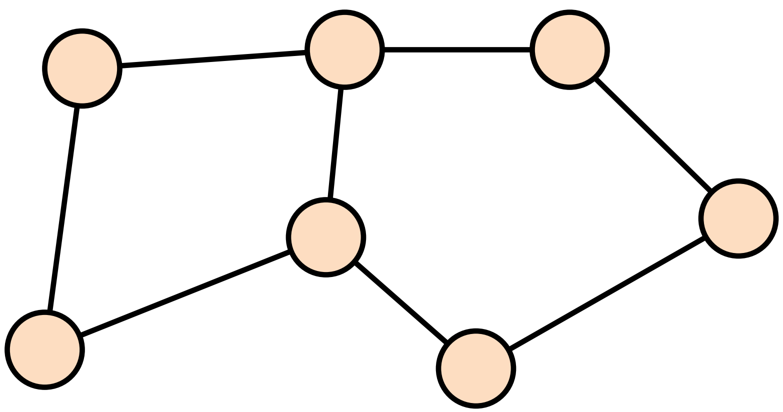
Wege

- Ein Eulerkreis eines ungerichteten Graphen ist ein Kreis, der jede Kante genau einmal enthält.
- Wann existiert ein Eulerkreis?



Wege

- Ein Hamiltonkreis eines ungerichteten Graphen ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält.
- Traveling Salesman Problem

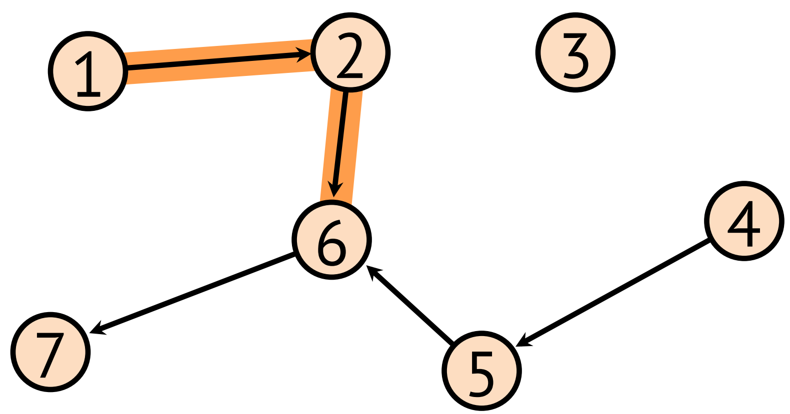


Wege

- Ein Knoten v ist von einem Knoten u erreichbar, u → v, wenn es einen Weg von u nach v gibt.

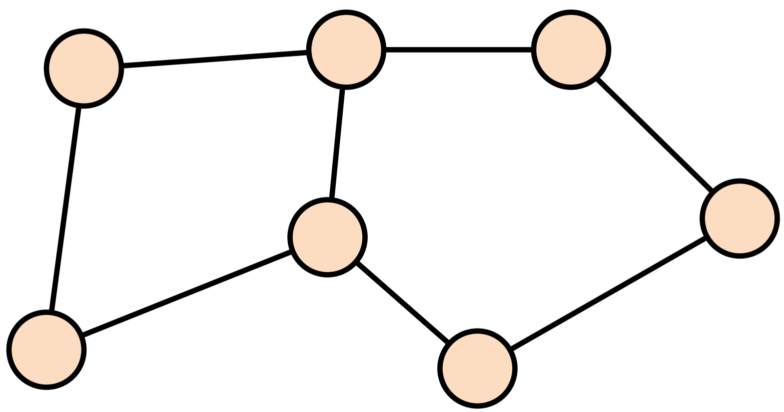
1 → 6, aber nicht 6 → 1

Isolierter Knoten:
Grad = 0



Zusammenhang

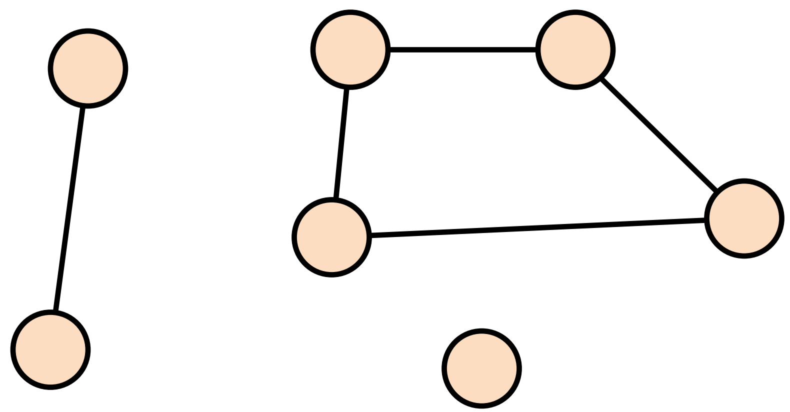
- Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn jedes Knotenpaar durch einen Weg verbunden ist.



zusammenhängend

Zusammenhang

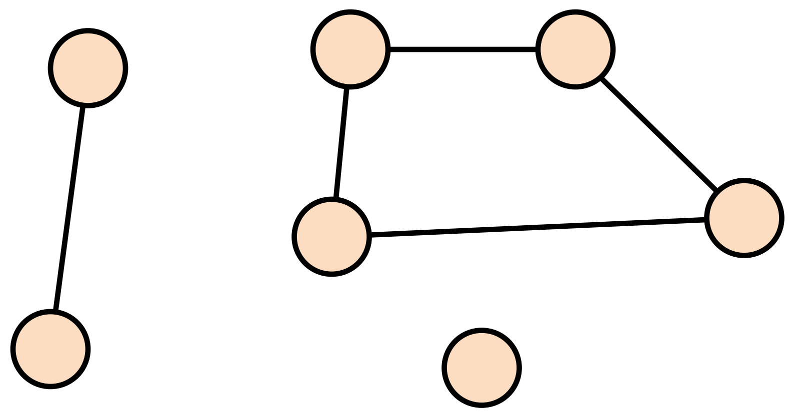
- Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn jedes Knotenpaar durch einen Weg verbunden ist.



nicht zusammenhängend

Zusammenhang

- Die Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen sind die Äquivalenzklassen der Relation $\rightarrow$
- Zeige: Für ungerichtete Graphen ist $\rightarrow$ eine Äquivalenzrelation



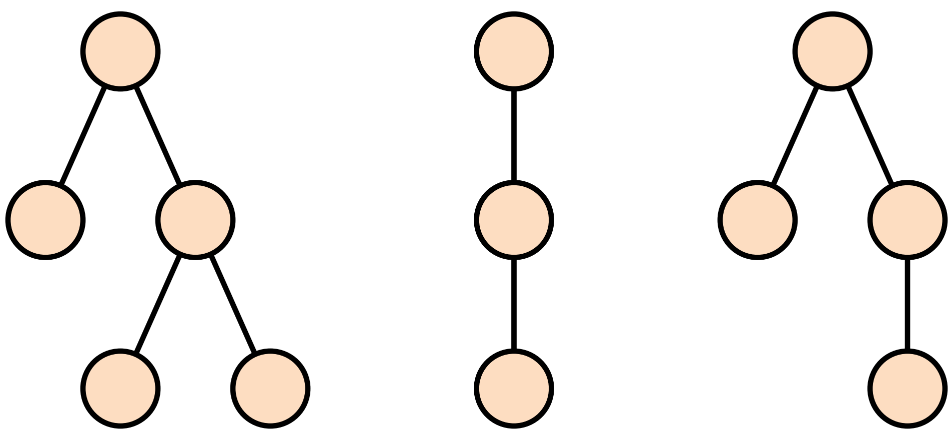
3 Zusammenhangskomponenten

Zusammenhang

- Ein gerichteter Graph heißt schwach, stark, einseitig zusammenhängend, wenn …

Bäume

- Ein ungerichteter Graph G heißt Wald, falls G keinen Kreis enthält.
- Ist G zusätzlich zusammenhängend, so heißt G ein Baum.
- Ein Wald besteht aus Bäumen.



Bäume

- Für einen Baum (V,E) gilt E = V−1
- Sei G=(V,E) ein Wald mit k Bäumen, Baum i habe n_i Knoten und m_i Kanten. Dann gilt:

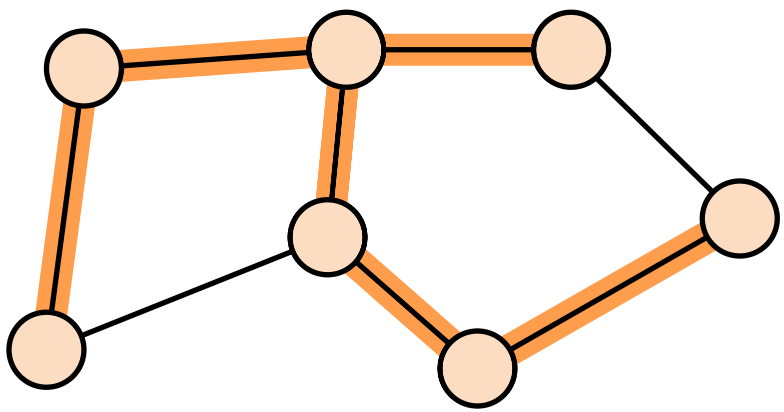
$$E = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i-1}^{k} n_i - k = V - k$$

- Folge: Ein Graph G=(V,E) mit k Zusammenhangskomponenten enthält genau dann einen Kreis, wenn

E > V−k

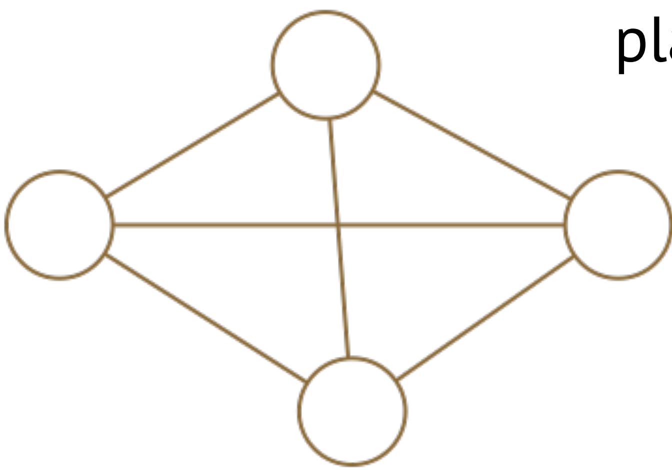
Spannbaum

- Ein Spannbaum zu einem Graphen $G=(V,E)$ ist ein Baum (V,E') mit $E' \subseteq E$

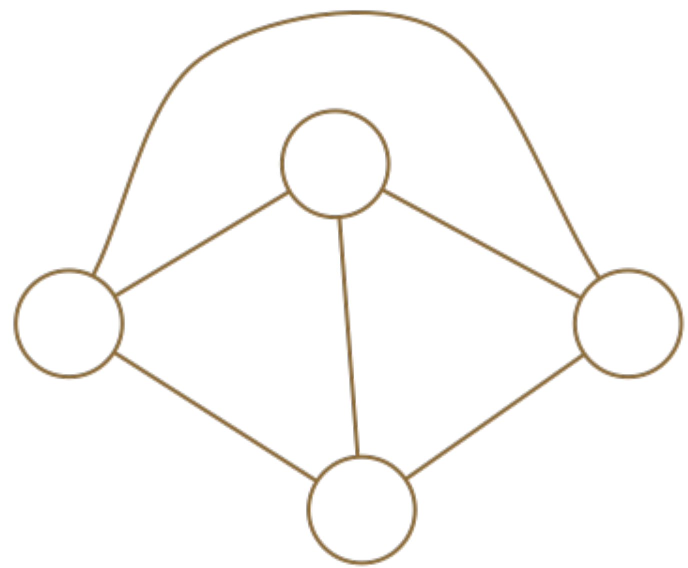


Spezielle Graphen

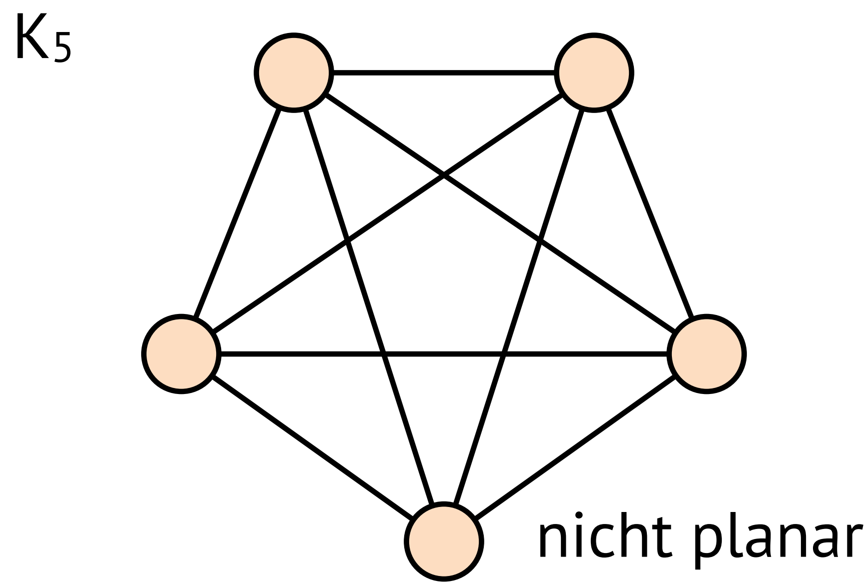
- Ein Graph $G=(V,E)$ heißt planar, wenn er sich überschneidungsfrei in der Ebene abbilden lässt.



planar, denn

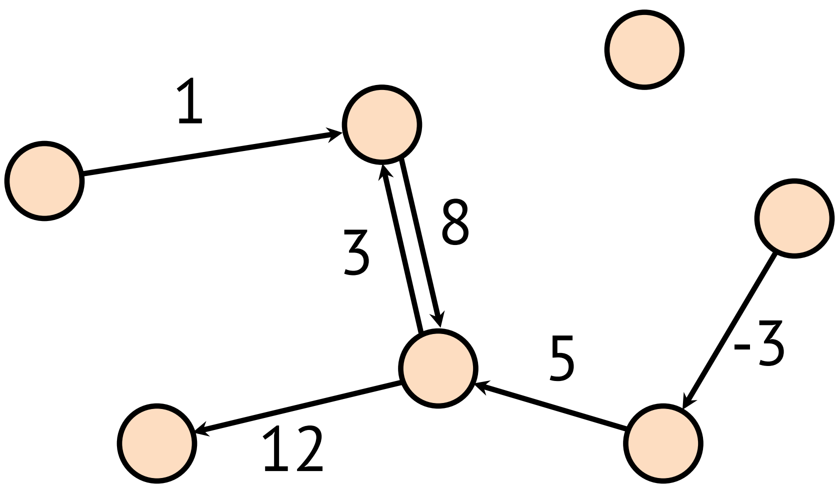


- Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$ heißt vollständig, falls $E = V \times V$.

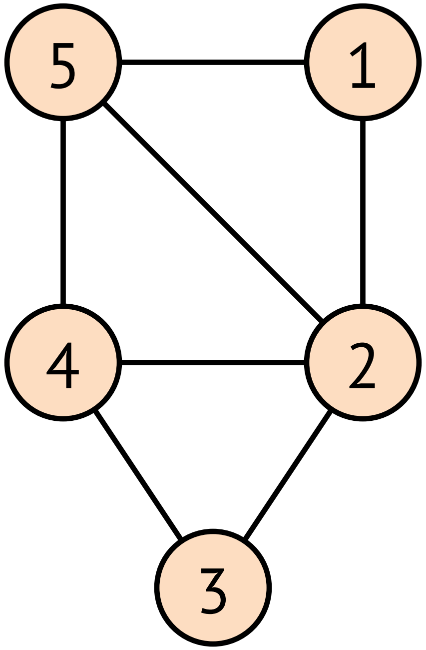


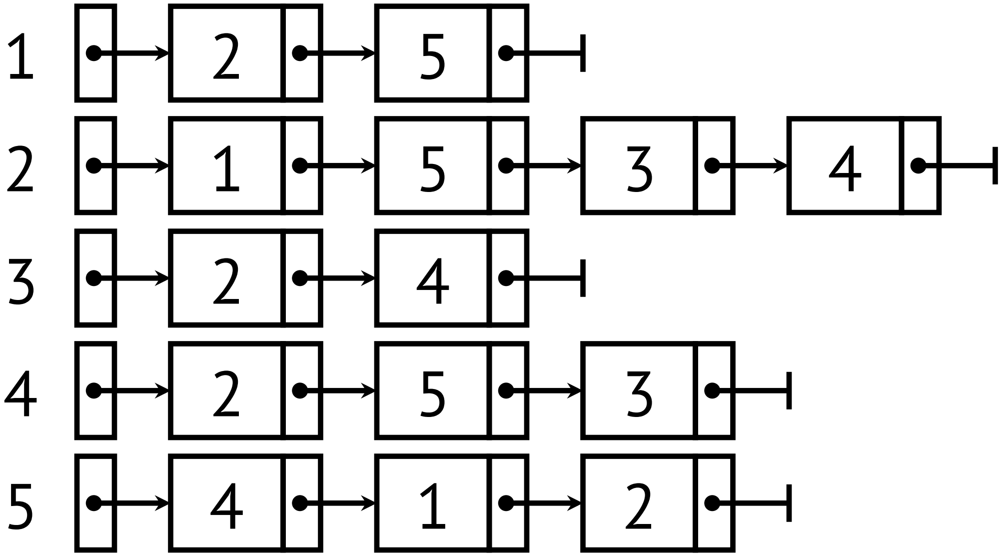
Gewichtete Graphen

- Zu einem gewichteten Graph $G=(V,E)$ gehört eine Gewichtsfunktion $w:E \rightarrow R$, die jeder Kante e ein Gewicht $w(e)$ zuordnet.

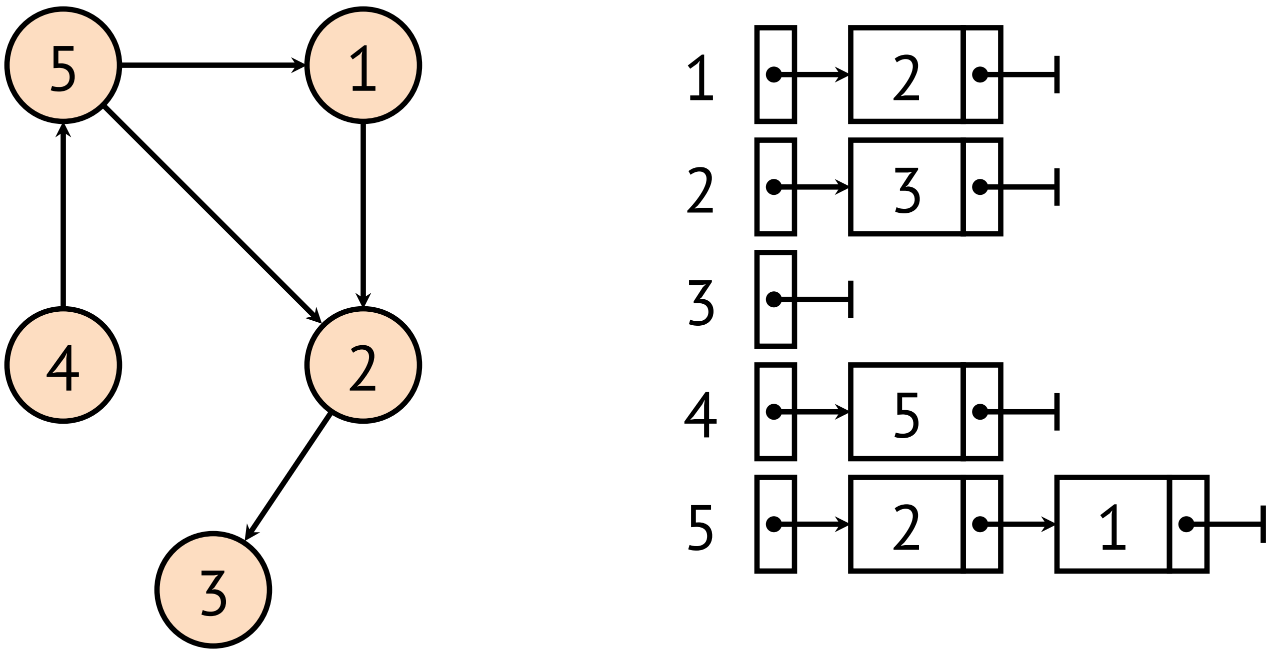


Adjazenzlisten

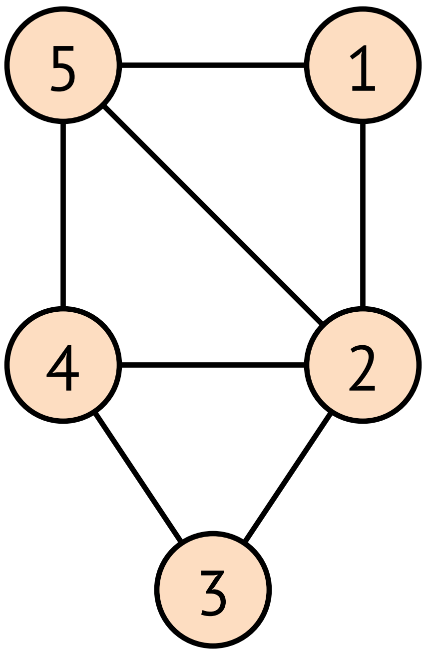




Adjazenzlisten

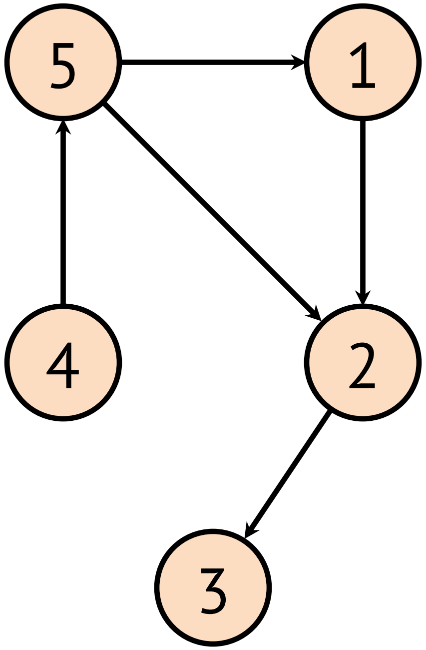


Adjazenzmatrizen



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Adjazenzmatrizen



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0

Speicheraufwand

- Adjazenzlisten: $O(V+E)$
- Adjazenzmatrizen: $O(V^2)$
- Ist nichts anderes angegeben, so verwenden die nachfolgend vorgestellten Algorithmen Adjazenzlisten zur Darstellung der Graphen.