2.4 Suchen

2.4.1 Selektion
2.4.2 Hashing

2.4.2 Hashing

- Suche ein bestimmtes Element in einer gegebenen Menge
  - Größe der Menge
  - Zahl der Anfragen
  - Größe des Wertebereichs
  - …

Je nach Wertebereich sind verschiedene algorithmische Ansätze sinnvoll.

Beispiel-Problem

- Geg. zwei Mengen
  $A = \{a_0,\ldots,a_{m-1}\}$ und $B = \{b_0,\ldots,b_{n-1}\}$
- Wertebereich $0 \leqslant a_i, b_j < q$
- Frage: $A \subseteq B$?
- Parameter: m, n, q

Naiver Algorithmus

- SubSet(A[0..m−1],B[0..n−1])

```
for i ← 0 to m−1 do                    ┐
    j ← 0                              │
    while j < n and A[ i ] ≠ B[ j ] do  │ O(n)
        j ← j+1                        │
    if j = n then                      │
        return false                   ┘ O(n×m)
return true
```


Naiver Algorithmus: Vergleiche jedes Element der einen Menge mit jedem Element der anderen Menge.

Naiver Algorithmus

- SubSetSort(A[0..m−1],B[0..n−1])
  sort(B)
  for i ← 0 to m−1 do
  if not Find(A[i],B) then
  return false
  return true

Naiver Algorithmus

- Find(a,B[0..n−1])
  for i ← 0 to n−1 do
  if a = B[i] then
  return true
  return false
- Aufwand O(n)

Naiver Algorithmus

- Find(a,B[0..n−1])

```
l ← 0
r ← n
while l < r do
    m ← ( l + r ) / 2
    if      a < B[m]   then  r ← m
    elseif  a > B[m]   then  l ← m + 1
    else    return true
return false
```

- Aufwand O(log n)

Da die Mengen vorsortiert sind, kann man sehr effizient den Bereich, in dem das zu suchende Element liegen muss, eingrenzen.

Naiver Algorithmus

- SubSetSort(A[0..m−1],B[0..n−1])

```
    sort(B)                                  ] O(n×logn)
    for i ← 0 to m−1 do                      ]
O(logn) [   if not Find(A[ i ], B) then      ] O(m×logn)
            return false                     ]
    return true
```

- Aufwand O((n+m)×log n)

Kleiner Wertebereich

- Wenn der Wertebereich klein ist, können Mengen als Array of Bool ("Bitvektor") implementiert werden
- setA[0,…,q−1] ∈ $\{0,1\}^q$

Der Wert k im Bit-Array ist dann 1, wenn das entsprechende Element k im Array vertreten ist, sonst 0.

Kleiner Wertebereich

```
• SubSet(A[0..m−1],B[0..n−1])
    setA[0..q−1] ← 0
    setB[0..q−1] ← 0
    for i ← 0 to m−1 do
      setA[ A[ i ] ] ← 1
    for i ← 0 to n−1 do
      setB[ B[ i ] ] ← 1
    for i ← 0 to q−1 do
      if setA[ i ] = 1 and setB[ i ] = 0 then
        return false
    return true
```

Kleiner Wertebereich

- SubSet(A[0..m−1],B[0..n−1])

```
O(q)  setA[0..q−1] ← 0
      setB[0..q−1] ← 0
O(m)  for i ← 0 to m−1 do
        setA[ A[ i ] ] ← 1
O(n)  for i ← 0 to n−1 do
        setB[ B[ i ] ] ← 1
O(q)  for i ← 0 to q−1 do
        if setA[ i ] = 1 and setB[ i ] = 0 then
          return false
      return true
```


Kleiner Wertebereich

- SubSet(A[0..m−1],B[0..n−1])

```
O(q)  setB[0..q−1] ← 0

O(n)  for i ← 0 to n−1 do
        setB[ B[ i ] ] ← 1
O(m)  for i ← 0 to m−1 do
        if setB[ A[ i ] ] = 0 then
          return false
      return true
```


Man kann sogar eine Menge Berechnugen sparen. Diese Verbesserungen verringern allerdings nur den konstanten Faktor und nicht die Komplexitätsklasse.

Kleiner Wertebereich

- Gesamtaufwand
  $O(n+m+q) = O(n+m)$
- Wertebereich wird als konstant angenommen
- Anwendung bei Mehrfachmengen

Mehrfachmengen sind Mengen, die erlauben, dass Elemente mehrmals vorkommen.

Mittlerer Wertebereich

- Implementierung des Datentyps Menge als Array of Bool ist elegant, da Einfügen, Zugriff und Löschen in $O(1)$ realisiert werden können.
- Probleme
  - Speicherbedarf $O(q)$
  - Initialisierung $O(q)$

Initialisierung des Bit-Arrays ist ineffizient, wenn q groß ist. Frage: Gibt es die Möglichkeit, den
vorher vorgestellten Algorithmus zu nutzen, ohne den Bit-Vektor zu initialisieren?

Lazy Initialization

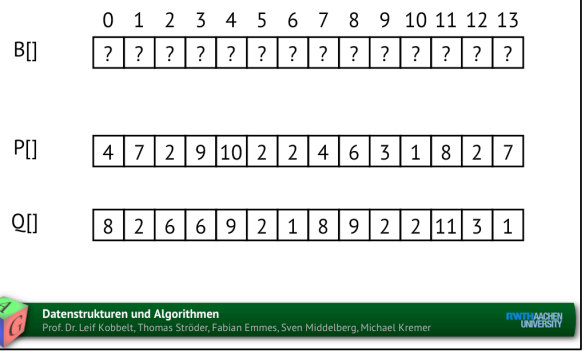
- Verwende
  - Array of Bool B[0..q−1]
  - Array of Int P[0..q−1]
  - Array of Int Q[0..q−1]
  - int top

P und Q werden auch nicht initialisiert (anfangs stehen dann dort Zufallswerte drin).
Der top-Pointer zählt, wieviele Bits schon initialisiert wurden.

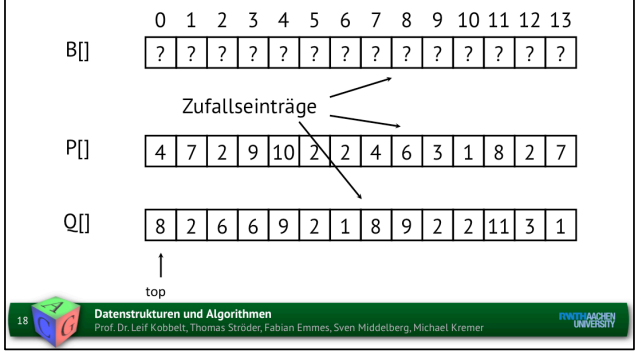
Lazy Initialization

- top: Anzahl der bereits initialisierten Einträge im Array B[]
- P[], Q[]: Zeigen an, ob der entsprechende Eintrag bereits initialisiert ist
  - P[]: in welchem Insert/Delete Schritt
  - Q[]: Bestätigung, dass P[] gültig ist

Lazy Initialization



Lazy Initialization



P: Im wievielten Schritt wurde das Bit gesetzt?
Q: Welches Bit wurde gesetzt?
Ist ein Element größer als das top-Element? => Wir wissen, dass die dort stehende Zahl eine Zufallszahl ist.

Lazy Initialization

Insert(6)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

$2 \geqslant top$
$\Rightarrow$ invalid

P[]	4	7	2	9	10	2	2	4	6	3	1	8	2	7

Q[]	8	2	6	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

Lazy Initialization

Insert(6)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	?	?	?	T	?	?	?	?	?	?	?

P[]	4	7	2	9	10	2	0	4	6	3	1	8	2	7

Q[]	6	2	6	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

T = True

Lazy Initialization

Insert(3)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	?	?	?	T	?	?	?	?	?	?	?

$9 \geqslant$ top
$\Rightarrow$ invalid

P[]	4	7	2	9	10	2	0	4	6	3	1	8	2	7

Q[]	6	2	6	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

↑ top

Lazy Initialization

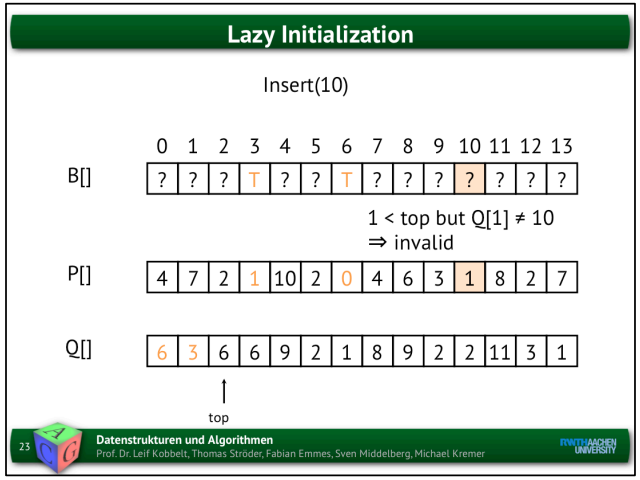
Insert(3)

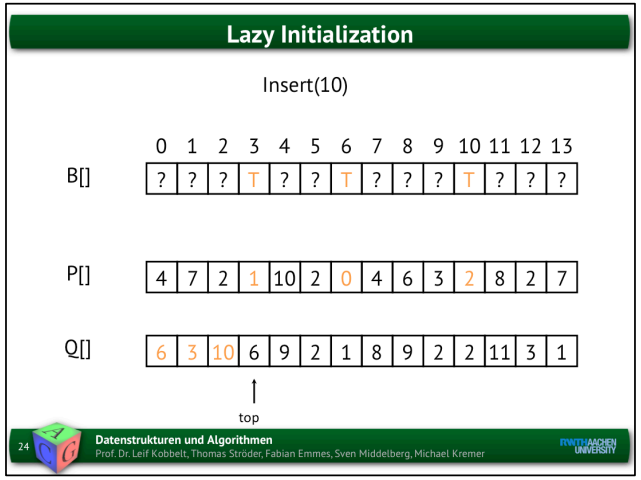
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	T	?	?	?	?	?	?	?

P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	1	8	2	7

Q[]	6	3	6	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

↑ top





Q ist „Rückversicherung“, dass entsprechendes Bit (nicht) initialisiert wurde.

Lazy Initialization

Delete(6)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	T	?	?	?	T	?	?	?

0 < top and Q[0] = 6
⇒ valid

P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

Lazy Initialization

Delete(6)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	F	?	?	?	T	?	?	?

P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

Lazy Initialization

Find(3)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	F	?	?	?	T	?	?	?

1 < top and Q[1] = 3
⇒ valid

P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

Lazy Initialization

Find(3) ⇒ T

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	F	?	?	?	T	?	?	?

1 < top and Q[1] = 3
⇒ valid

P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

Lazy Initialization

Find(4)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	F	?	?	?	T	?	?	?

10 ⩾ top
⇒ invalid

P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

↑ top

Lazy Initialization

Find(4) ⇒ F

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	F	?	?	?	T	?	?	?

10 ⩾ top
⇒ invalid

P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

↑ top

Lazy Initialization

Find(12)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	F	?	?	?	T	?	?	?

2 < top but Q[2] ≠ 12
⇒ invalid

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

Lazy Initialization

Find(12) ⇒ F

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B[]	?	?	?	T	?	?	F	?	?	?	T	?	?	?

2 < top but Q[2] ≠ 12
⇒ invalid

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P[]	4	7	2	1	10	2	0	4	6	3	2	8	2	7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q[]	6	3	10	6	9	2	1	8	9	2	2	11	3	1

top

Lazy Initialization

- Init()
  top ← 0
- Insert(k)
  if P[k] < top and Q[P[k]] = k then
  B[k] ← true
  else
  P[k] ← top
  Q[top] ← k
  B[k] ← true
  top ← top+1

Lazy Initialization

- Delete(k)
  if P[k] < top and Q[P[k]] = k then
  B[k] ← false
  else
  P[k] ← top
  Q[top] ← k
  B[k] ← false
  top ← top+1

Lazy Initialization

- Find(k)
  if P[k] < top and Q[P[k]] = k then
    return B[k]
  return false

Großer Wertebereich

- z.B. Matrikelnummern: 6-stellig
- Große Wertebereiche sind in der Regel nicht dicht besetzt
- Bilde den Wertebereich W auf eine (kleinere) Indexmenge J ab

Bei sehr großen q will man gar keinen Bit-Vektor mehr haben, auch nicht mit Lazy-Initialization. Am Beispiel von Matrikelnummern:
Der Wertebereich, über den Matrikelnummern definiert sind, ist sehr groß (z.B. mehrere Millionen verschiedene Möglichkeiten), aber
die Anzahl der an Studenten vergebenen Matrikelnummern ist deutlich geringer. Hier ist Hashing sinnvoll.

Hash-Funktion

- Hash-Funktion $F: W \rightarrow J$
- Schlüssel $F(w) = j$
- Effiziente Suche in der Index-Menge J, wenn die Funktion F einfach ist.
- In der Regel $\#J << \#W$
- Kollisionen: $F(w)=F(w')$ obwohl $w \neq w'$
- Wie häufig sind Kollisionen?

Hashing

- Speichere Elemente $a_1,\ldots,a_n \in W$ in einer Tabelle der Größe $O(n)$
- Hash-Funktion $F: W \rightarrow J$
  - $W \subseteq N$: beliebig großer Wertebereich
  - $J \subseteq N$: Hash-Tabelle
- Schlüssel $F(w) = j$
- Wähle F so, dass die Schlüssel $F(a_i)$ gleichverteilt in J liegen

Hashing

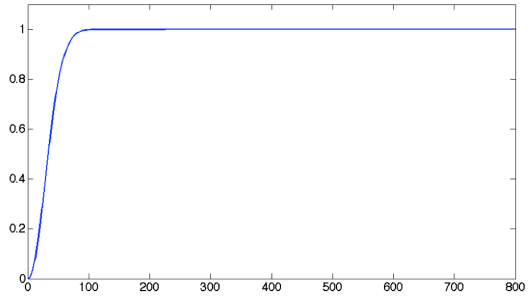
- Bucket-Sort
  - Gleichverteilte Schlüssel
  - Berechne Speicheradresse aus Schlüssel
  - Erwarteter Füllgrad der Buckets $O(1)$
- Hashing
  - Berechne Index aus dem Schlüssel
  - Wähle die Größe der Indexmenge in der Größenordnung der Zahl der Schlüssel
  - Erzeuge Gleichverteilung durch “Streuung”

Hash-Funktion erreicht vielleicht, dass alle in diesem Semester verfgebenen Matrikelnummern über Indexbereich von z.B. 0 bis 25000 abgebildet werden und in dem Bereich gleichverteilt sind. Dazu benötigen wir eine Hash-Funktion, die dies bewerkstelligt.

Kollisionen

- Identifiziere Studenten über die Matrikelnummer: 10^6 Möglichkeiten
- Studenten in dieser Vorlesung < 800
- Finde eine Funktion F, die den Bereich $[0..10^6-1]$ möglichst gleichverteilt in den Bereich $[0..799]$ abbildet (z.B. $\bmod 800$).

Kollisionen



Ab 100 Studenten ist die Kollisionswahrscheinlichkeit bereits bei 1 (bei der Funktion x mod 800).

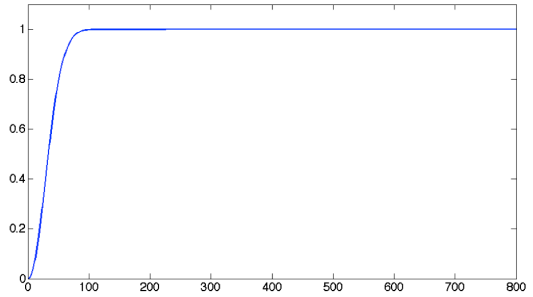
Kollisionen

- Kollisionswahrscheinlichkeit 50% schon bei 34 Studenten erreicht!
- Bei 50 Studenten bereits 79%
- vgl. Geburtstagsparadoxon

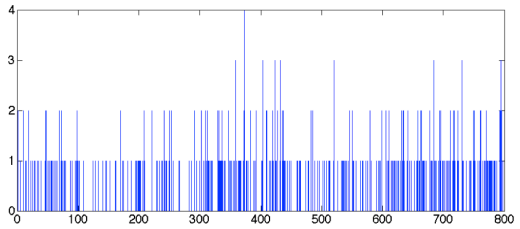
Kollisionen

- Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit
  - 1. Student: $P_1 = 800/800$
  - 2. Student: $P_2 = 800/800 \times 799/800$
  - ...
  - k. Student: $P_k = 800/800 \times \ldots \times (801-k)/800$
- Kollisionswahrscheinlichkeit: $Q_k = 1-P_k$

Kollisionen



Kollisionen



Es gibt nicht nur einfache Kollisionen, sondern auch Mehrfachkollisionen (bis zu vier in dem Falle). Die Anzahl der Kollisionen ist abhängig von der „Güte“ der Hashing-Funktion.
Aber was ist eine gute Hashing-Funktion?

Kollisionen

- 384 Studenten sind im Übungssystem registriert …
  - 61 einfache Kollisionen
  - 9 mehrfache Kollisionen
  - Obwohl: Tabelle nur zu 48% gefüllt

Hashing

- Finde gute Hash-Funktion
  - Surjektivität
  - Gute Streuung auch bei kohärenten Original-Schlüsseln
- Kollisionsbehandlung
  - geschlossen
  - offen

Hash-Funktionen

- Perfekte Hash-Funktion
  - $S \subseteq W = \{0,\ldots,N-1\}$, $\#W=N$, $\#S=n$
  - Finde eine Funktion F, die die Elemente von S injektiv auf die Indexmenge $\{0,\ldots,m-1\}$ abbildet $(m \geq n)$
  - Existiert immer, aber schwer zu finden
  - Für $m \geq 3 \times n$ in $O(n \times N)$

Für die „perfekte“ Schlüsselmenge muss man die Schlüsselmenge kennen.

Hash-Funktionen

- Universelle Hash-Funktion
  - Erwarteter Aufwand für Elementzugriff $O(1)$
  - Worst-case Aufwand $O(n)$ (vgl. Bucket-Sort)
  - Hängt von der Struktur der Menge $S \subseteq W$ ab
  - Definiere eine Menge $H=\{F_i()\}$ von Hashfunktionen, so dass bei $w \neq w'$ $\#\{ F \in H: F(w)=F(w') \} \leqslant \#H/m$ ist (m = Größe der Indexmenge)
  - Wähle Hash-Funktion aus dieser Menge zufällig aus ⟶ gutes Durchschnittsverhalten bei Kollisionen

Wir suchen „universelle Hash-Funktionen“, also solche, die in den meisten Fällen gut funktionieren. Trick, den man einsetzen kann: Mehrere Hash-Funktionen verwenden.

Hash-Funktionen

- Präfix, Suffix, …
- $F(w) = w \bmod q$
  - $q = 2^k$ ⟶ benutzt nur die letzten k Binärstellen
  - $q = 10^k$ ⟶ benutzt nur die letzten k Dezimalstellen
  - q prim ⟶ optimale Streuung
- $F(w) = (w \times s + t) \bmod q$
  - Beliebige q möglich, besser: Primzahlen

Modulo einer Primzahl q ist immer gut, weil man alle Stellen bis q-1 optimal ausnutzt. Bei anderen Zahlen kann die Besetzung der Indizes beliebig ungleichverteilt sein.

Hash-Funktionen

- Problem: Tabellengröße ≠ Primzahl
- $G(w) = (w \times s + t) \bmod q$
  (q große Primzahl)
- $F(w) = G(w) \bmod q'$
  (q' Tabellengröße)

p sorgt für Gleichverteilung, q' für Ausnutzung aller Stellen in der Zieltabelle.

Hash-Funktionen

- Mittel-Quadrat-Methode
  - Seien die Originalschlüssel p-stellige Dezimalzahlen
  - Quadrate sind $2p$-stellig
  - Tabellengröße 10^q, $q < p$
  - $F(w) = \lfloor 10^{-\lceil p/2 \rceil} w^2 \rfloor \bmod 10^q$
  - Hängt von allen p Stellen ab

Man kann beliebige Hash-Funktionen definieren. Modulo einer Primzahl ist allerdings das, was in der Praxis oft am meisten Sinn macht.

Kollisionsbehandlung

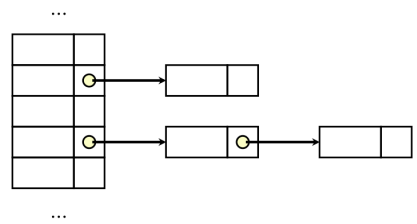
- Offenes Hashing
  (geschlossene Adressierung)
- Geschlossenes Hashing
  (offene Adressierung)

Offenes Hashing

- Jeder Tabelleneintrag ist Anchor-Element einer verketteten Liste
- Alle Objekte mit gleichem Hash-Key werden in die entsprechende Liste eingefügt
- Nachteil: es wird dynamisch mehr Speicherplatz belegt
- Vorteil: es werden keine alternativen Adressen berechnet

Offenes Hashing: Man braucht sukzessive neuen Speicher, d.h. die Tabelle wächst mit Einfügen von Elementen.
Beim gescholssenen Hashing steht die Größe der Hash-Tabelle von Anfang an fest.

Offenes Hashing



Offenes Hashing

- Erwartete Länge der Listen bei Belegungsfaktor $a = n/m$ ist ebenfalls gleich a
  (n = Zahl der Objekte, m = Größe der Tabelle)
- Vgl. Analyse von Bucket-Sort
- Erwarteter Aufwand: $O(1+a)$
  - $a \ll 1$ → Array-Verhalten
  - $a = 1$
  - $a \gg 1$ → Listen-Verhalten

Geschlossenes Hashing

- Wenn eine Kollision auftritt (weil der adressierte Tabellenplatz schon belegt ist) wird ein alternativer Index berechnet
- Vorteil: es wird kein neuer Speicherplatz belegt
- Nachteil: es werden andere Adressen verwendet

Nachteil: Kollisionen werden immer heufiger, je mehr Elemente eingefügt werden, weil für jedes Element, für das eine Kollision stattfindet, eine alternative Adresse gefunden werden muss,
die dann wiederum die Zieladresse eines anderen Elements sein kann...

Geschlossenes Hashing

- Anstatt nur den Index F(w) zu verwenden, wird eine Sequenz von Indizes
  F(w,0), F(w,1),…,F(w,m-1) berechnet.
- Das Objekt w wird im ersten freien Tabellenplatz dieser Sequenz gespeichert
- Nachteil: Die Sequenz muss bei jedem Zugriff durchsucht werden

Im schlimmsten Fall müssen beim Suchen eines Elements alle Tabelleneinträge nach dem Element abgesucht werden.

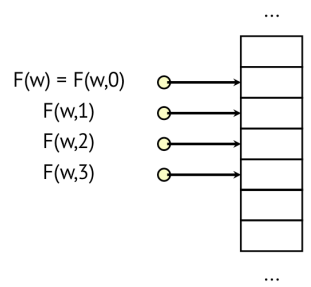
Geschlossenes Hashing

- Nachteil: Die Sequenz muss bei jedem Zugriff durchsucht werden
  - Positiver Fall → erwartet bis zur Hälfte
  - Negativer Fall → immer bis zum Ende
- Die Sequenzen sind typischerweise länger als die Listen beim offenen Hashing!

Kollisionsauflösung

- Lineares Sondieren
  $F(w,i) = (F(w) + i) \bmod m$
- Führt in der Regel zu Cluster-Bildung, da jedes Element, das mit einem kleinen Cluster kollidiert, an dessen Ende eingefügt wird und damit den Cluster vergrößert

Lineares Sondieren

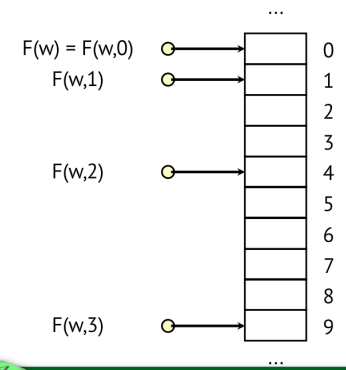


Kollisionsauflösung

- Quadratisches Sondieren
  $F(w,i) = (F(w) + i^2) \bmod m$
- Besseres Streuverhalten, insbesondere wenn m eine Primzahl ist.
- Noch besser: m Primzahl mit $m = 4 \times j + 3$
  $F(w,2 \times i+1) = (F(w) + i^2) \bmod m$
  $F(w,2 \times i) = (F(w) - i^2) \bmod m$

Man kann auch sondieren, indem man Speicherstellen vor und nach der Zielstelle in Betracht zieht.

Quadratisches Sondieren



Kollisionsauflösung

- Doppeltes Hashing

  $F(w,i) = (F_1(w) + F_2(w) * i) \bmod m$

  wobei m teilerfremd zu allen Werten $F_2(w)$
- Fast ideales Verhalten, Kollisionswahrscheinlichkeiten

  $P(F_1(w) = F_1(w') \bmod m) = 1/m$

  $P(F_2(w) = F_2(w') \bmod m) = 1/m$

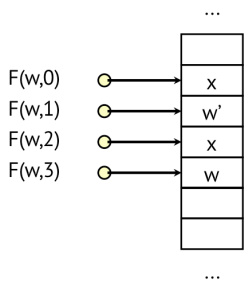
  $P(F_1(w) = F_1(w') \bmod m \wedge F_1(w)+F_2(w) * i = F_1(w')+F_2(w') * i \bmod m) = 1/m^2$

Das, was in der Praxis sehr häufig Anwendung findet, ist die Benutzung einer zweiten Hash-Funktion.

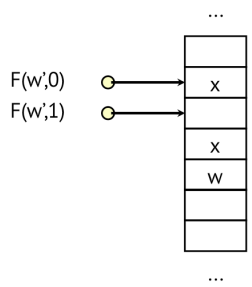
Löschen

- Bei offenem Hashing einfach
- Bei geschlossenem Hashing
  - Markiere Tabelleneinträge als gelöscht
  - Gelöschte Einträge können überschrieben werden
  - Gelöschte Einträge werden beim Suchen berücksichtigt

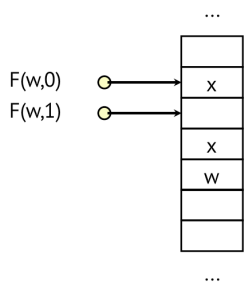
Löschen



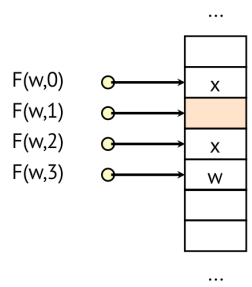
Löschen



Löschen



Löschen



Aufwandsabschätzung

- Wie viele Kollisionen treten auf?
- Wie oft muss sondiert werden?
- Annahme: Ideale Hash-Funktion (aber nicht perfekt)
- Schlüssel werden gleichverteilt

Aufwandsabschätzung

- Q(i,n,m) Wahrscheinlichkeit, dass
  - mindestens i Sondierungsschritte
  - bei bereits n Elementen
  - in einer Tabelle der Größe m

  notwendig sind

Aufwandsabschätzung

- Q(0,n,m) = 1
- Q(1,n,m) = n/m
- Q(2,n,m) = n/m × (n−1)/(m−1)
- …
- Q(i,n,m) = n/m × … × (n+1−i)/(m+1−i)

Aufwandsabschätzung

- Mittlere Kosten für das Einfügen des (n+1)sten Elements:

$$\begin{aligned} C_{ins}(n,m) &= \sum_{j=0}^{n}(j+1)(Q(j,n,m)-Q(j+1,n,m)) \\ &= \sum_{j=0}^{n}(j+1)Q(j,n,m) - \sum_{j=1}^{n+1} jQ(j,n,m) \\ &= \sum_{j=0}^{n} Q(j,n,m) - (n+1)Q(n+1,n,m) \end{aligned}$$

Aufwandsabschätzung

- Mittlere Kosten für das Einfügen des (n+1)sten Elements:

$$\begin{aligned} C_{ins}(n,m) &= \sum_{j=0}^{n} Q(j,n,m) - (n+1)Q(n+1,n,m) \\ &= \sum_{j=0}^{n} Q(j,n,m) \\ &= \frac{m+1}{m+1-n} \end{aligned}$$

Aufwandsabschätzung

- Mittlere Kosten für das Einfügen des (n+1)sten Elements:

$$C_{ins}(n,m) \approx \frac{m+1}{m+1-n}$$

- Sei $a = n/m$, dann gilt

$$C_{ins}(n,m) \approx \frac{1}{1-a}$$

Aufwandsabschätzung

$$C_{ins}(n,m) \approx \frac{1}{1-a}$$

a	50%	70%	90%	95%	99%	99.9%
C_{ins}	2	3.3	10	20	100	1000

Aufwandsabschätzung

- Suchen eines Elements in der Hash-Tabelle
  - Es muss dieselbe Sondierungssequenz zur Kollisionsauflösung abgearbeitet werden
  - Negative Suche endet beim ersten freien Tabelleneintrag
    → $C_{search}(n,m) = C_{ins}(n,m)$
  - Positive Suche bricht früher ab…

Aufwandsabschätzung

- Positive Suche
  - Kosten entsprechen den Kosten beim Einfügen (gleiche Sondierungssequenz)
  - Bei welchem Füllgrad wurde das Element eingefügt?
  - Bilde Mittelwert über alle möglichen Einfüge-Reihenfolgen

Aufwandsabschätzung

$$C_{search}(n,m) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} C_{ins}(j,m) = \cdots = \frac{-ln(1-a)}{a}$$

a	50%	70%	90%	95%	99%	99.9%
C_{search}	1.38	1.72	2.56	3.15	4.65	6.91

Im Falle a = 50% hat man 38% „Zugriffsoverghead“, d.h. Mehraufwand.