2.3 Sortieren

Optimaler Sortieralgorithmus

- Was ist die theoretische Untergrenze für die Komplexität eines Sortieralgorithmus?
- Wann können wir mit einem Sortieralgorithmus zufrieden sein?

Optimaler Sortieralgorithmus

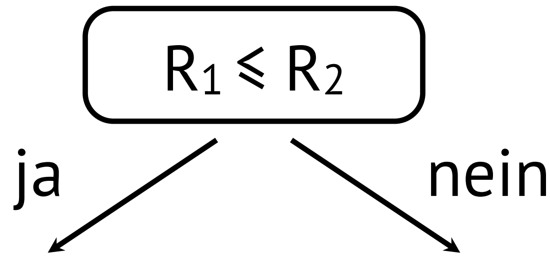
- Reprise: Sortierproblem
  - gegeben:
    - Objektmenge R
    - Ordnung $\leqslant$ auf R^2
    - $R_1, R_2, \ldots, R_n$
  - gesucht: Permutation π mit $R_{\pi(1)} \leqslant R_{\pi(2)} \leqslant \ldots \leqslant R_{\pi(n)}$
- Sogenanntes “Sortieren durch Vergleichen”

Optimaler Sortieralgorithmus

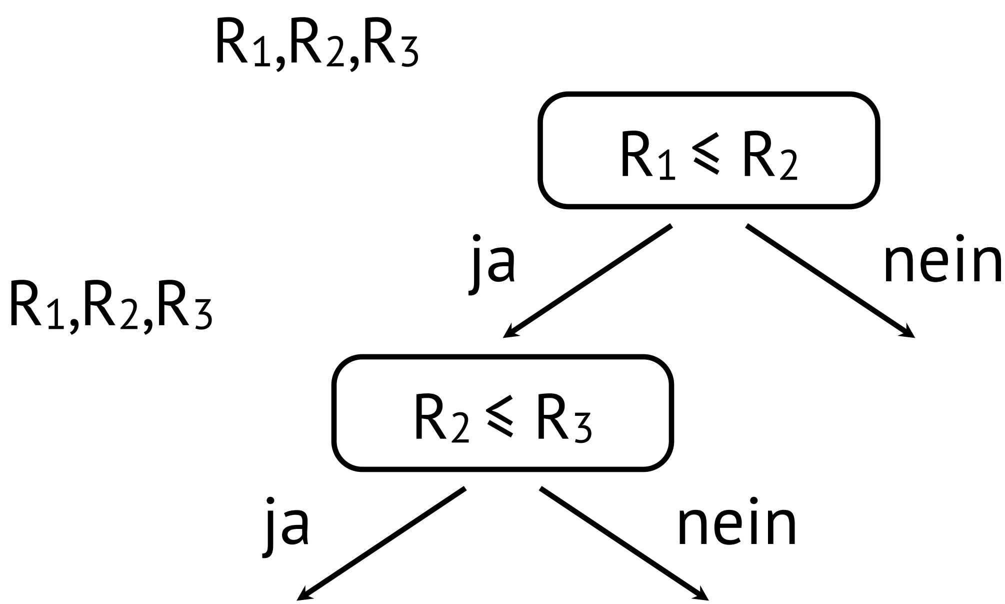
- Der Ablauf eines nur auf Vergleichen basierenden Sortieralgorithmus kann durch einen Entscheidungsbaum dargestellt werden.
  – innere Knoten = Vergleich
  – Blätter = sortierende Permutation

Optimaler Sortieralgorithmus

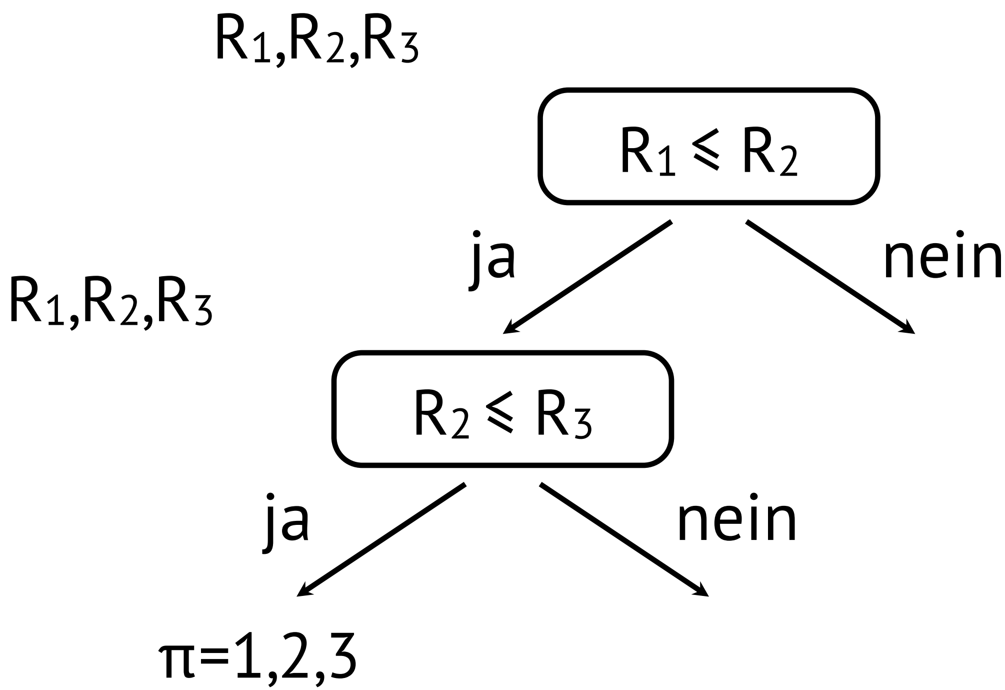
R_1, R_2, R_3



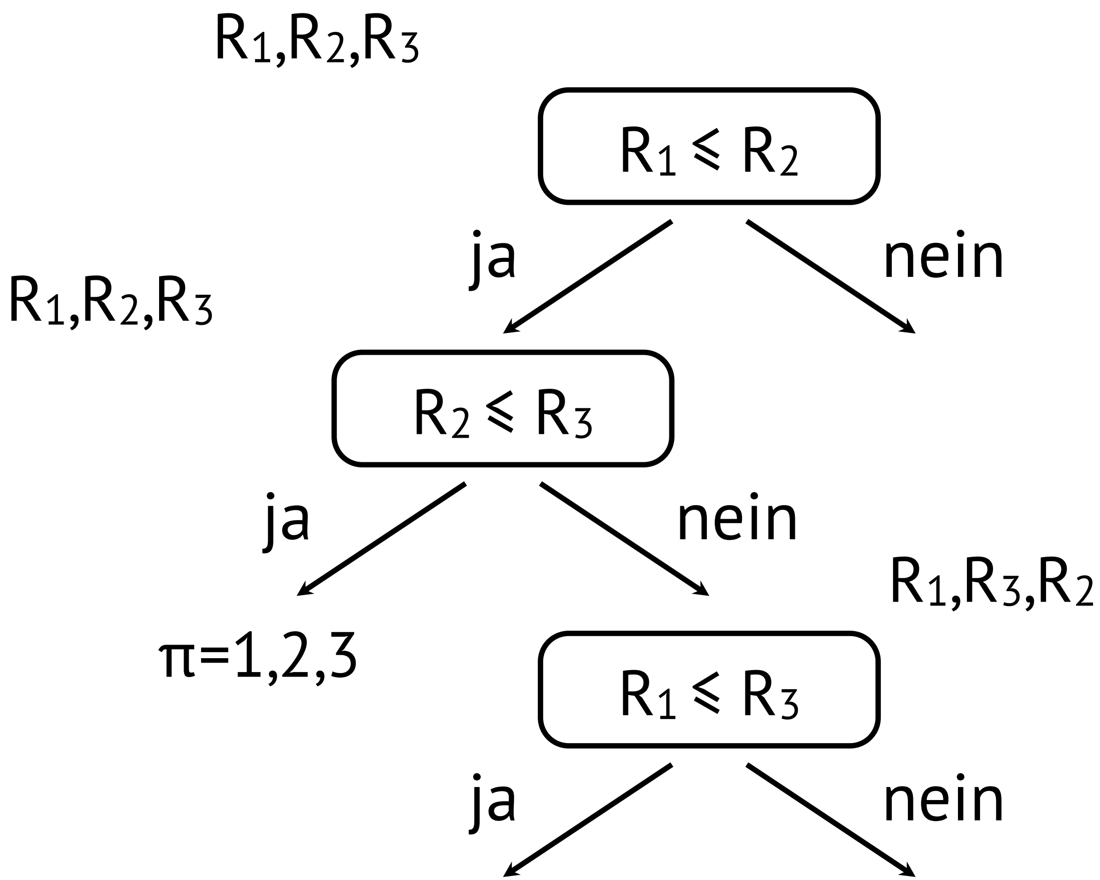
Optimaler Sortieralgorithmus



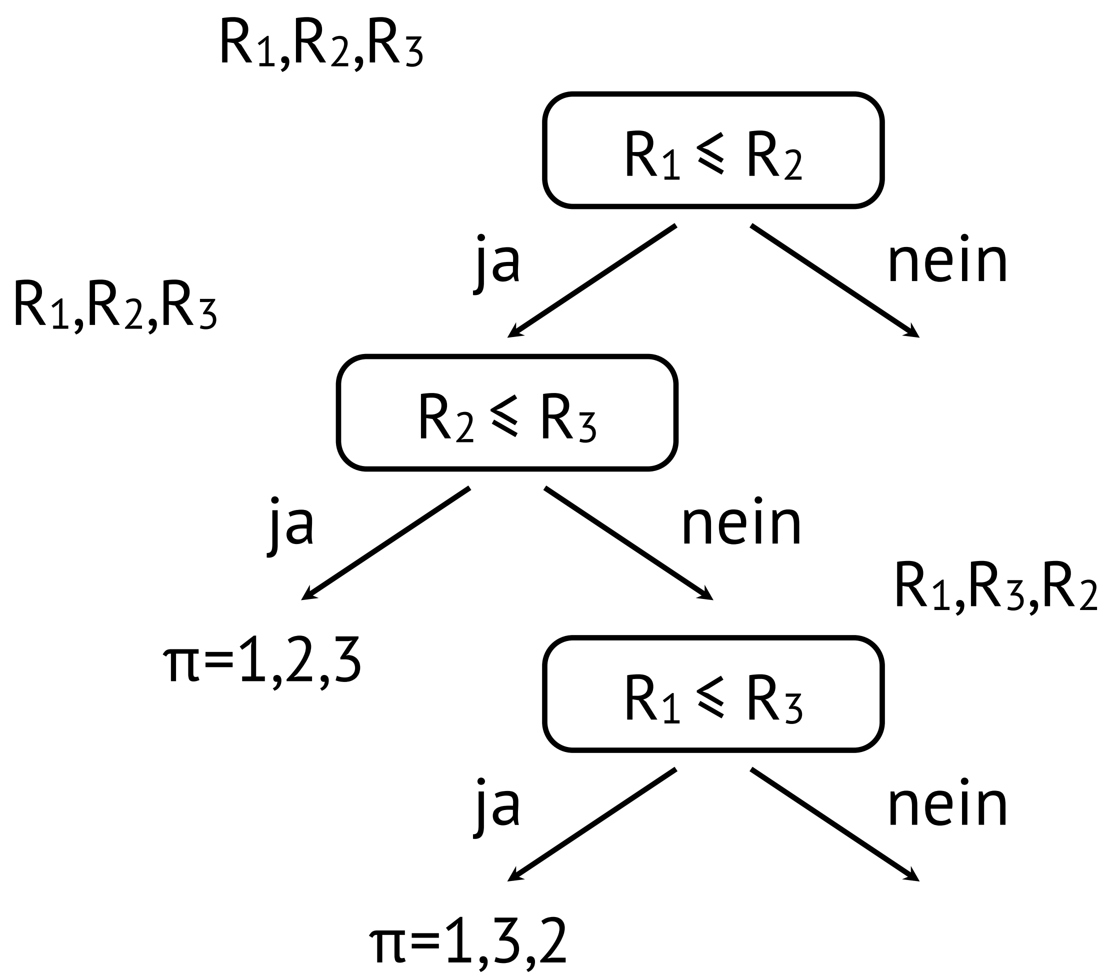
Optimaler Sortieralgorithmus



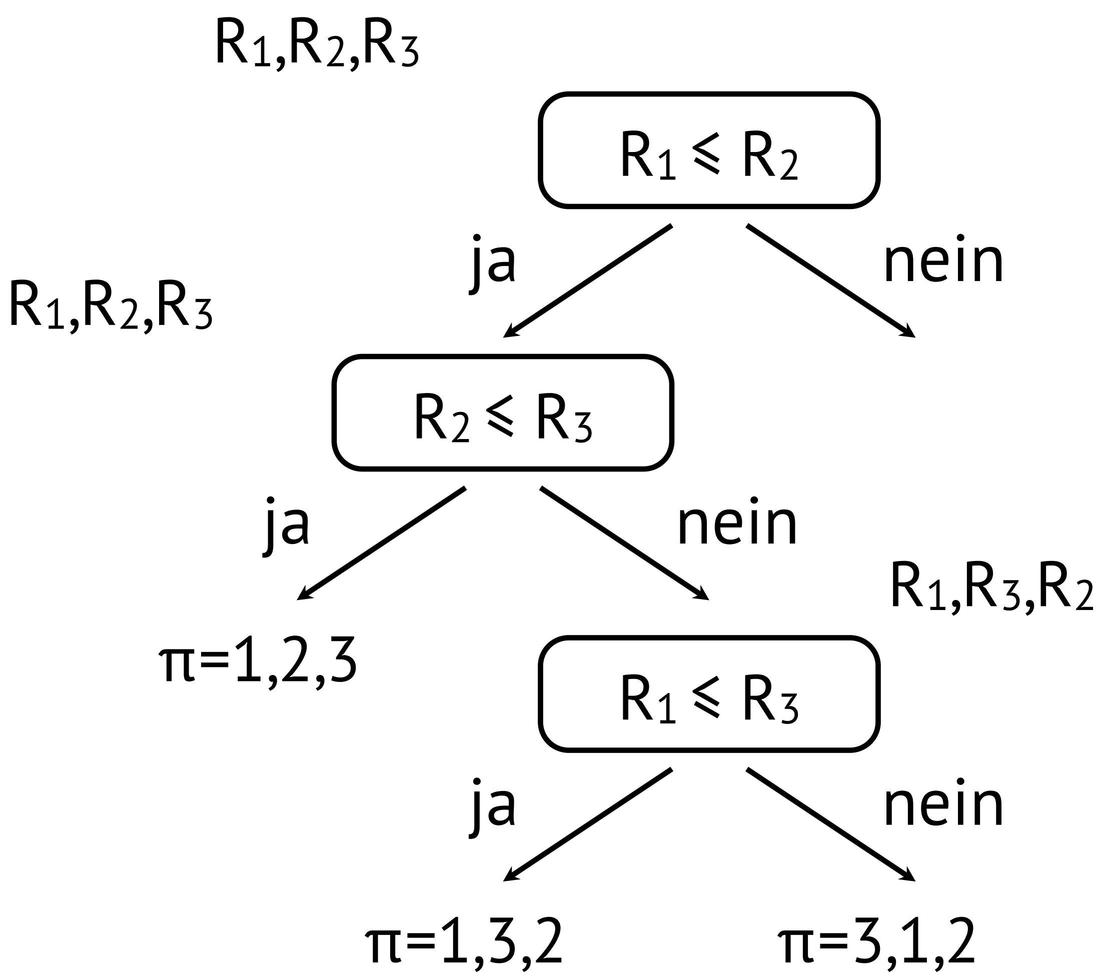
Optimaler Sortieralgorithmus



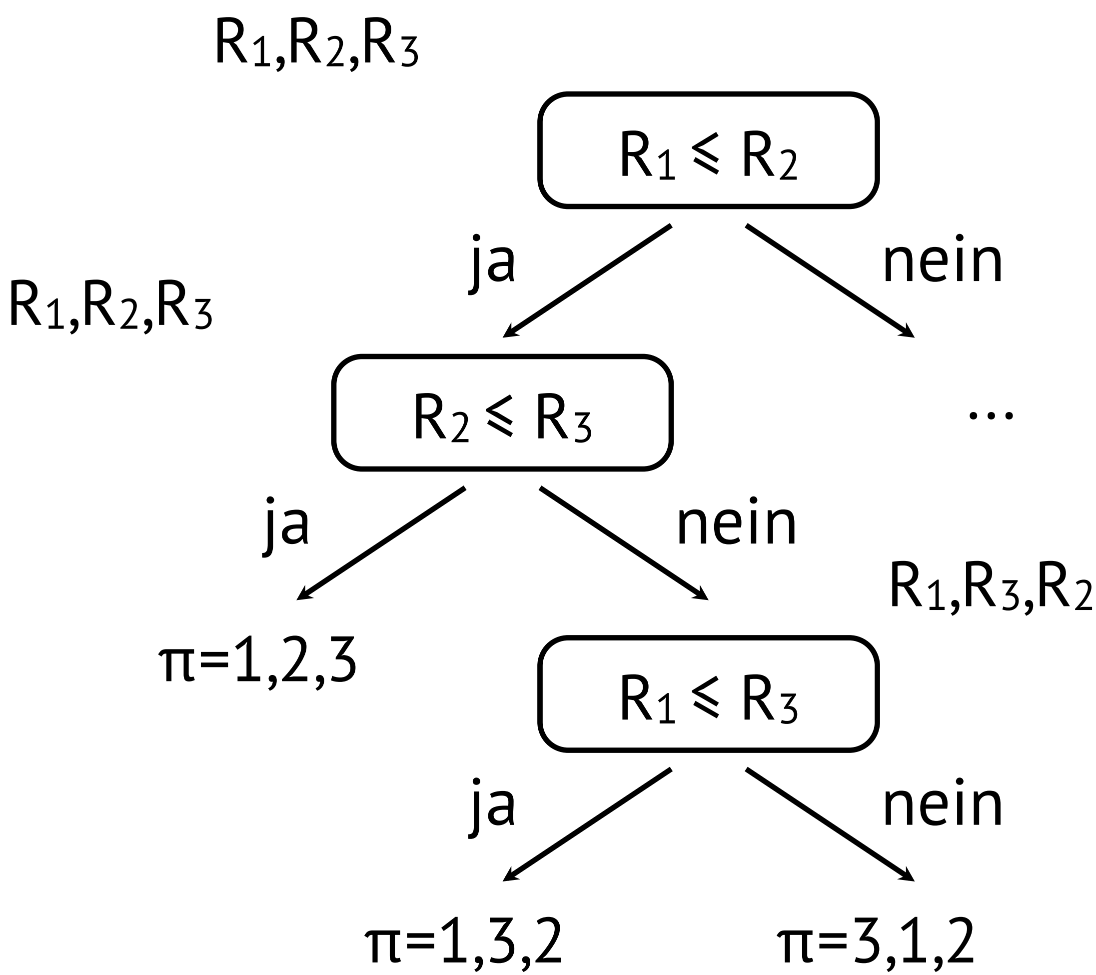
Optimaler Sortieralgorithmus



Optimaler Sortieralgorithmus



Optimaler Sortieralgorithmus



Optimaler Sortieralgorithmus

1. Es gibt $n!$ mögliche Permutationen. Jeder Entscheidungsbaum hat also mindestens $n!$ Blätter.
2. Die maximale Zahl von Blättern in einem Binärbaum der Höhe h ist 2^h. Jeder Entscheidungsbaum hat also höchstens 2^h Blätter.

➡ $2^h \geqslant n!$

➡ $h \geqslant \log_2(n!)$

Optimaler Sortieralgorithmus

Möglichkeit 1

$$
\begin{aligned}
h &\geq \log_2(n!) \\
&= \log_2 \prod_{i=1}^{n} i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log_2 i \\
&\geq \sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} \log_2 i + \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log_2 i \\
&\geq 0 + \lceil n/2 \rceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \\
&\geq \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2) = \Theta(n \log n)
\end{aligned}
$$

Optimaler Sortieralgorithmus

$$
\begin{aligned}
h &\geq \log_2(n!) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log_2(i) \\
&= c \sum_{i=1}^{n} \ln(i) \\
&\geq c \int_{1/2}^{n+1/2} \ln(x) dx \\
&= c \left(x \ln(x) - x \Big|_{1/2}^{n+1/2} \right) \\
&= \Omega(n \log(n))
\end{aligned}
$$

Möglichkeit 2:
Integralmethode