2.3 Sortieren

Quick-Sort

- Idee
  - Divide & Conquer
  - Wähle ein Element R aus
  - Teile Folge in zwei Sub-Folgen $R_L \leqslant R$ und $R_R \geqslant R$
  - Sortiere R_L und R_R durch rekursiven Aufruf
  - Setze Teilfolgen zusammen: $R_L \oplus R \oplus R_R$

Wähle ein (Pivot-)Element R und löse Problem rekursiv so, dass alle Elemente rechts von R größer und alle Elemente links von R kleiner als R sind.
Dabei sind die Teillisten R_L und R_R in sich NICHT sortiert. Im nächsten Schritt wird dann rekursiv dieser Algorithmus auf die Teillisten angewandt.

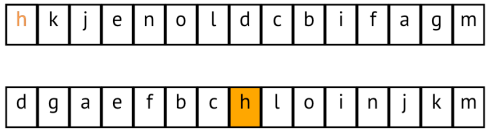
Quick-Sort

h	k	j	e	n	o	l	d	c	b	i	f	a	g	m

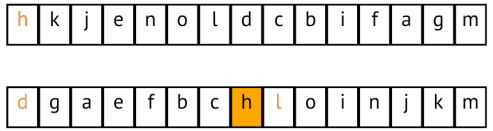
Quick-Sort

h	k	j	e	n	o	l	d	c	b	i	f	a	g	m

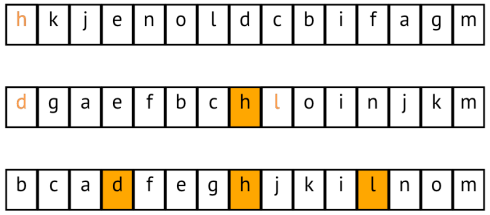
Quick-Sort



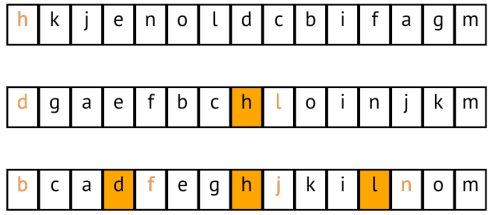
Quick-Sort



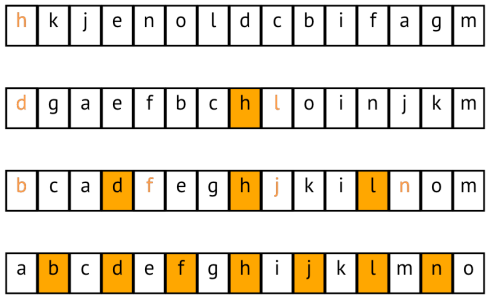
Quick-Sort



Quick-Sort



Quick-Sort



Quick-Sort: Algorithmus

- QuickSort(A[l..r])
  if l < r then
    m ← Partition(A[l..r])
    QuickSort(A[l..m−1])
    QuickSort(A[m+1..r])

- Aufruf mit: QuickSort(A[1..n])

Das Sortieren hat letztendlich in der Unterteilung der Liste jeweils stattgefunden.

Quick-Sort: Algorithmus

```
• Partition(A[l..r])
    i ← l−1; j ← r
    while i < j do
      i ← i+1
      while A[ i ] < A[ r ] do
        i ← i+1
      j ← j−1
      while A[ j ] > A[ r ] do
        j ← j−1
      swap(A[ i ], A[ j ])
    swap(A[ i ], A[ j ])
    swap(A[ i ], A[ r ])
    return i
```


Quick-Sort: Algorithmus

- Achtung: Verwende Sentinel, um korrekte Terminierung der inneren Schleife zu garantieren.
- Aufruf mit
  A[0] ← − ∞
  QuickSort(A[1..n])
- while A[i] < A[r] do
  i←i+1
- while A[j] > A[r] do
  j←j−1

Bricht spätestens für i = r ab

Bricht spätestens für j = l − 1 ab

Sentinel sorgt dafür, dass die j-Schleife nicht über die Grenzen hinaus laufen kann, so dass Terminierung gewährleistet ist.

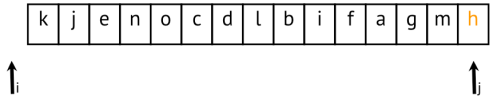
Quick-Sort: Beispiel

k	j	e	n	o	c	d	l	b	i	f	a	g	m	h

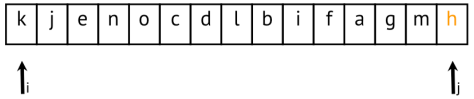
Quick-Sort: Beispiel

k	j	e	n	o	c	d	l	b	i	f	a	g	m	h

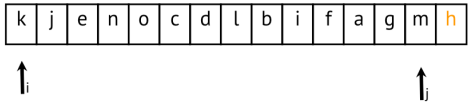
Quick-Sort: Beispiel



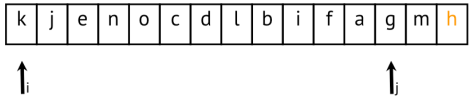
Quick-Sort: Beispiel



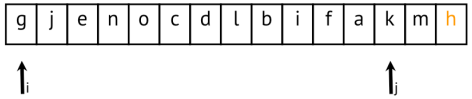
Quick-Sort: Beispiel



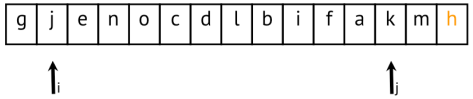
Quick-Sort: Beispiel



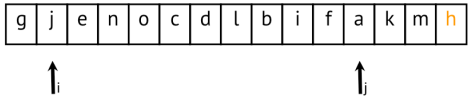
Quick-Sort: Beispiel



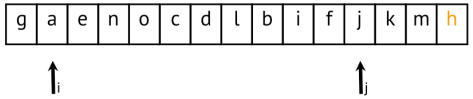
Quick-Sort: Beispiel



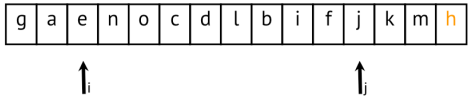
Quick-Sort: Beispiel



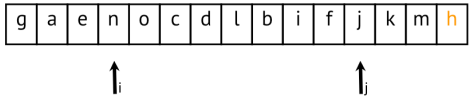
Quick-Sort: Beispiel



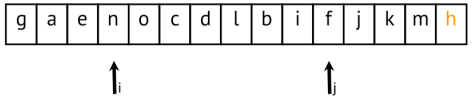
Quick-Sort: Beispiel



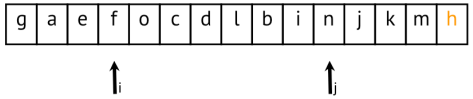
Quick-Sort: Beispiel



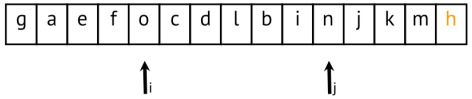
Quick-Sort: Beispiel



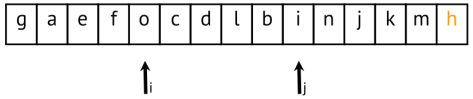
Quick-Sort: Beispiel



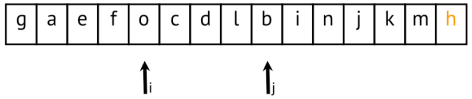
Quick-Sort: Beispiel



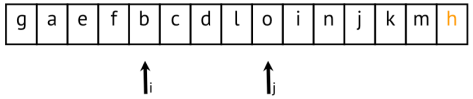
Quick-Sort: Beispiel



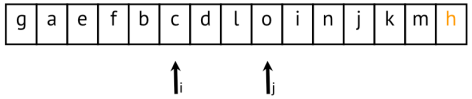
Quick-Sort: Beispiel



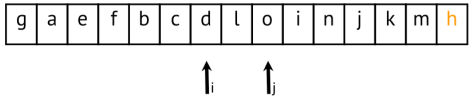
Quick-Sort: Beispiel



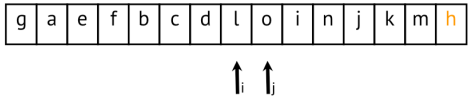
Quick-Sort: Beispiel



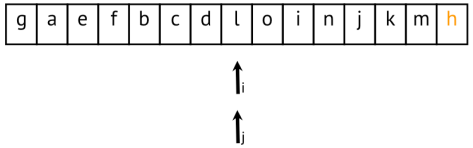
Quick-Sort: Beispiel



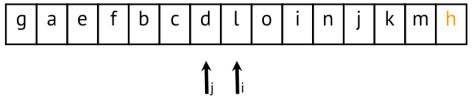
Quick-Sort: Beispiel



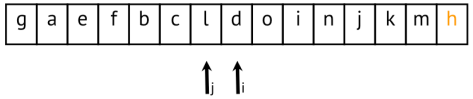
Quick-Sort: Beispiel



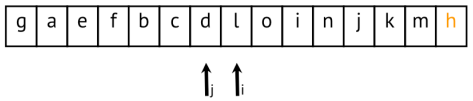
Quick-Sort: Beispiel



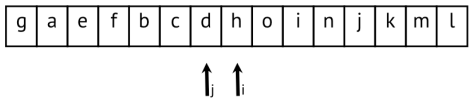
Quick-Sort: Beispiel



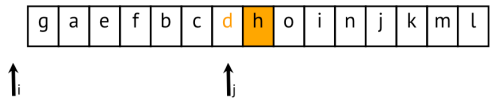
Quick-Sort: Beispiel



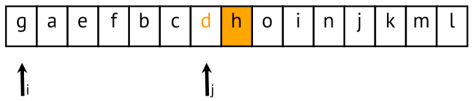
Quick-Sort: Beispiel



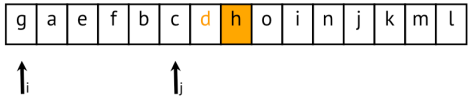
Quick-Sort: Beispiel



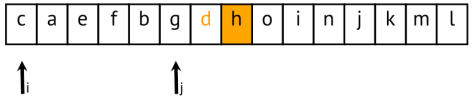
Quick-Sort: Beispiel



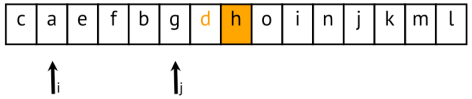
Quick-Sort: Beispiel



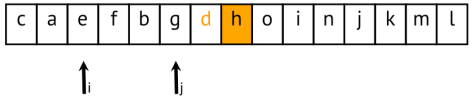
Quick-Sort: Beispiel



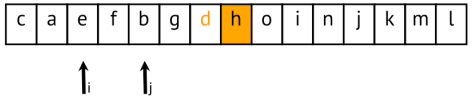
Quick-Sort: Beispiel



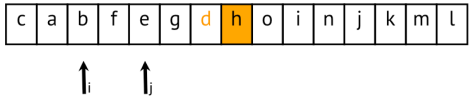
Quick-Sort: Beispiel



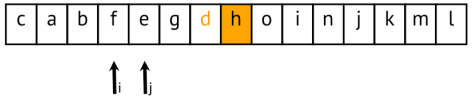
Quick-Sort: Beispiel



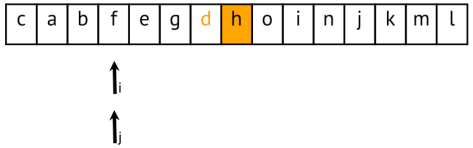
Quick-Sort: Beispiel



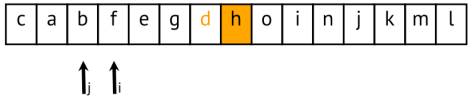
Quick-Sort: Beispiel



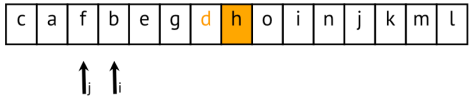
Quick-Sort: Beispiel



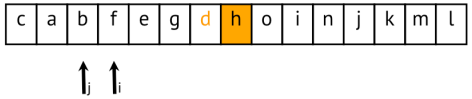
Quick-Sort: Beispiel



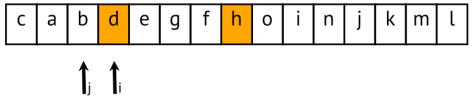
Quick-Sort: Beispiel



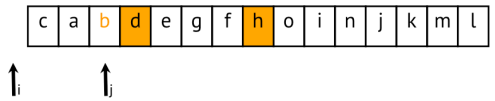
Quick-Sort: Beispiel



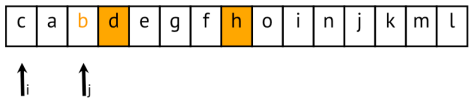
Quick-Sort: Beispiel



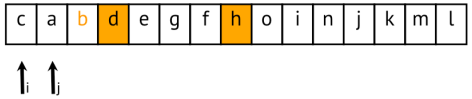
Quick-Sort: Beispiel



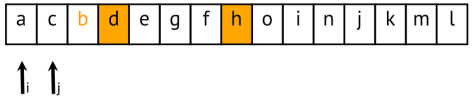
Quick-Sort: Beispiel



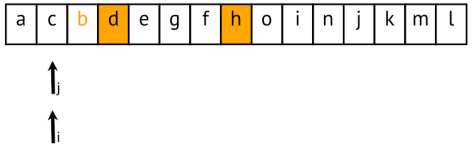
Quick-Sort: Beispiel



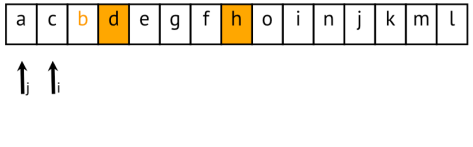
Quick-Sort: Beispiel



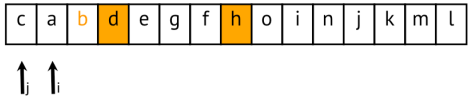
Quick-Sort: Beispiel



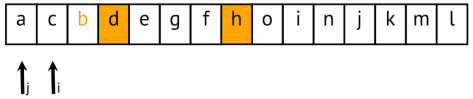
Quick-Sort: Beispiel



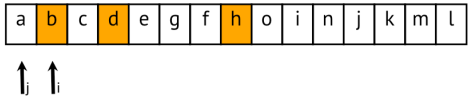
Quick-Sort: Beispiel



Quick-Sort: Beispiel



Quick-Sort: Beispiel



Quick-Sort: Beispiel

Es bauen sich quadratähnliche Strukturen auf. Pivotelement ist jeweils Punkt zwischen zwei Quadraten.
Die Quadrate entsprechen dann den R_L und R_R. Dies wird sukzessive ausgeführt.

Quick-Sort: Aufwand

- Aufwand
  - Best Case:
    $T(n) \approx 2 \times T(n/2) + O(n) \Rightarrow O(n \times \log n)$
    (Folge zerfällt immer in zwei gleich große Teile)
  - Worst Case:
    $T(n) \approx T(n-1) + O(n) \Rightarrow O(n^2)$
    (Folge ist bereits auf- oder absteigend sortiert)
  - Average Case: ...

Worst-Case tritt ein, wenn die Folge bereits sortiert ist. Der Grund ist, dass alle Elemente in (sortierter) Teilliste größer sind als das Pivotelement.

Quick-Sort: Aufwand

- Aufwand
  - Average case

$$T(n) \approx O(n) + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + T(n-1-i)\right)$$

$$= O(n) + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

Als erstes: Partitionierung. Diese hat lineare Laufzeit (vgl. Folie 11).
Das Sortieren wird dann jeweils auf beide Teillisten (T(i) und T(n-1-i)) ausgeführt.
1/n kommt daher, dass angenommen wird, dass die Element gleichverteilt sind und das Pivotelement jeden beliebigen Wert aus der unsortierten Teilliste annehmen kann.

Quick-Sort: Aufwand

$$nT(n) = cn^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

$$(n-1)T(n-1) = c(n-1)^2 + 2\sum_{i=0}^{n-2} T(i)$$

$$nT(n) - (n-1)T(n-1) = cn^2 - c(n-1)^2 + 2T(n-1)$$

$$nT(n) = 2cn - c + (n+1)T(n-1)$$

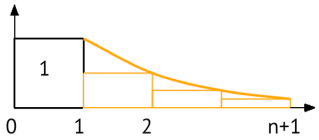
Quick-Sort: Aufwand

$$\begin{aligned}
T(n) &= c' + \tfrac{n+1}{n}T(n-1) \\
&= c' + \tfrac{n+1}{n}c' + \tfrac{n+1}{n-1}T(n-2) \\
&= c' + \tfrac{n+1}{n}c' + \tfrac{n+1}{n-1}c' + \tfrac{n+1}{n-2}T(n-3) \\
&= c'\left(\tfrac{n+1}{n+1} + \tfrac{n+1}{n} + \tfrac{n+1}{n-1} + \cdots + \tfrac{n+1}{1}\right) \\
&= c'(n+1)\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \\
&\leq c''(n+1)\log(n+1) \\
&= O(n \log n)
\end{aligned}$$

Trick, um das Sigma loszuwerden. Wenn Formel für n gilt, dann auch für (n-1) (zweite Zeile). Subtrahiere diese Formel nun von der oben genannten.
Dadurch kommen wir auf die Formel in der unteren Zeile.

Quick-Sort: Aufwand

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} &\leq 1 + \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= 1 + ln(x)|_1^{n+1} \\ &= 1 + ln(n+1) \\ &= O(\log(n+1))\end{aligned}$$



Quick-Sort: Aufwand

- Average Case: T(n) = O(n×log n)
- Heuristiken zur Verbesserung der Performanz
  - Pivot-Element: (A[l]+A[r])/2, …
  - Bei kleinen Folgen auf Insertion-Sort wechseln
    (oder auch nicht: Cache-Kohärenz)
  - Iterative Implementierung mit Stack

Wenn man davon ausgeht, dass die Listen schon partiell vorsortiert sind, ist es besser, das Pivotelement jeweils aus der Mitte jeder Teilliste zu wählen (oder als Pseudoelement, welches
nicht gezwungenerweise in der Liste existieren muss), da dann die Wahrscheinlichkeit höher ist, dass die Elemente davor kleiner und dahinter größer als das Pivotelement sind.

Merge-Sort

- Idee
  - Quick-Sort ist schnell, wenn die beiden Teilfolgen nach Partition() ungefähr die gleiche Größe haben.
  - Teile die Folge **ohne** Vorsortieren in zwei gleiche Teile
  - Sortiere die Teilfolgen
  - Kombiniere die Teilergebnisse

Merge-Sort (rekursiv)

- MergeSort(A[l..r])
  if l < r then
    m ← (l+r)/2
    MergeSort(A[l..m])
    MergeSort(A[m+1..r])
    Merge(A[l..m,m+1..r])

vgl. mit Quick-Sort

- Aufruf mit: MergeSort(A,1,n)

Merge-Sort (rekursiv)

- Merge(A[l..m,m+1..r])

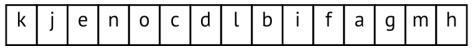
```
new B[1..r−l+1]; i ← 1; j ← l; k ← m+1
while j ⩽ m and k ⩽ r do
   if A[j] ⩽ A[k] then
      B[i++] ← A[j++]
   else
      B[i++] ← A[k++]
while j ⩽ m do B[i++] ← A[j++]
while k ⩽ r  do B[i++] ← A[k++]
for i ← l to r do
   A[ i ] ← B[ i−l+1 ]
```

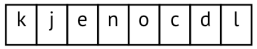

Merge-Sort: Beispiel

k	j	e	n	o	c	d	l	b	i	f	a	g	m	h

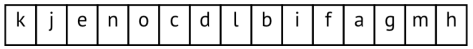
A wird unterteilt in zwei Listen: eine von Index l bis m und die andere von m+1 bis r.

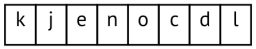
Merge-Sort: Beispiel

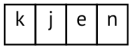




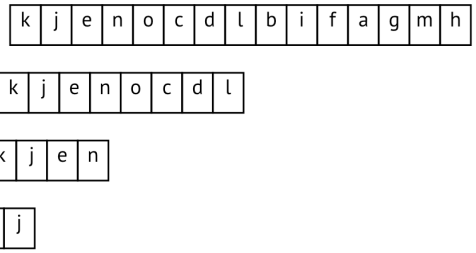
Merge-Sort: Beispiel



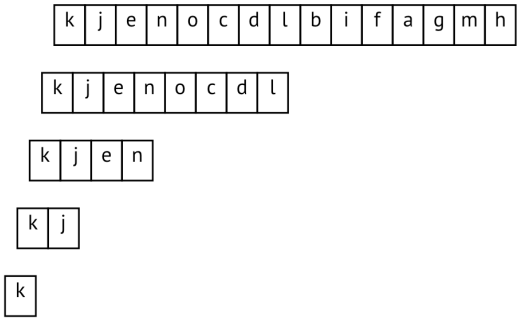




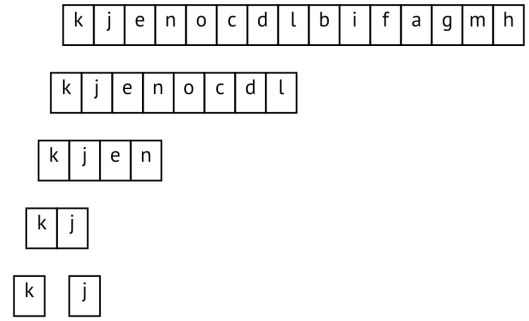
Merge-Sort: Beispiel



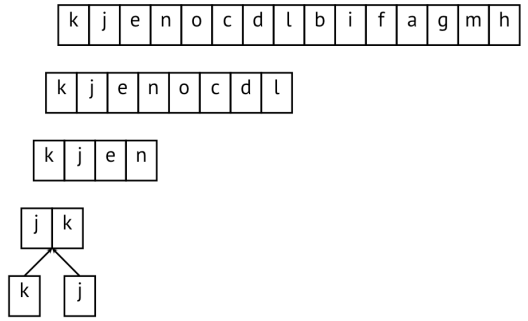
Merge-Sort: Beispiel



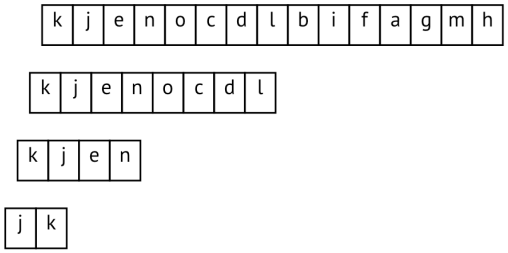
Merge-Sort: Beispiel



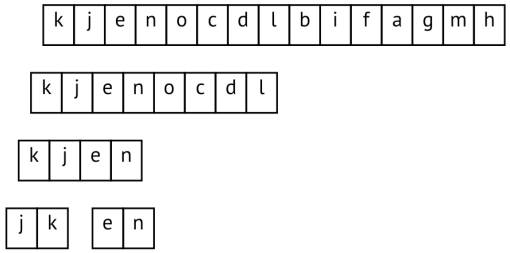
Merge-Sort: Beispiel



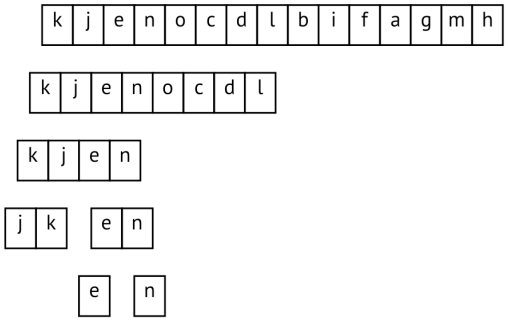
Merge-Sort: Beispiel



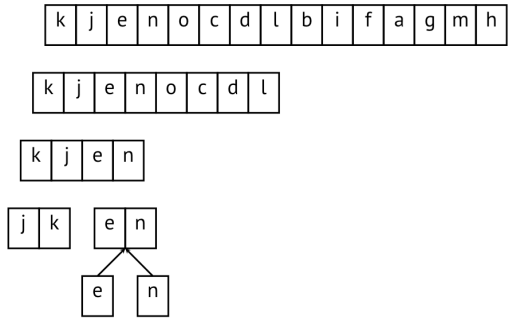
Merge-Sort: Beispiel



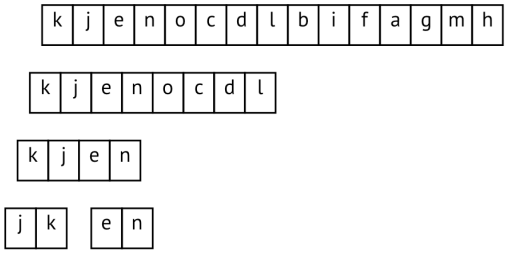
Merge-Sort: Beispiel



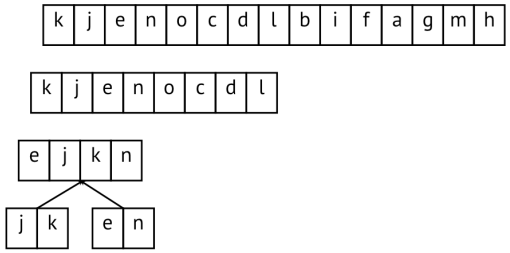
Merge-Sort: Beispiel



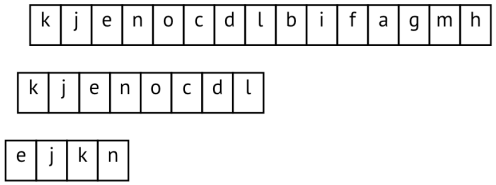
Merge-Sort: Beispiel



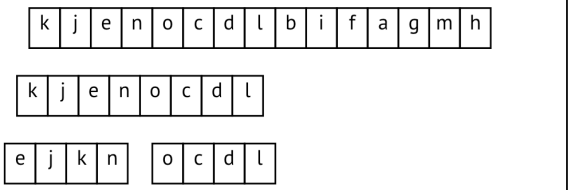
Merge-Sort: Beispiel



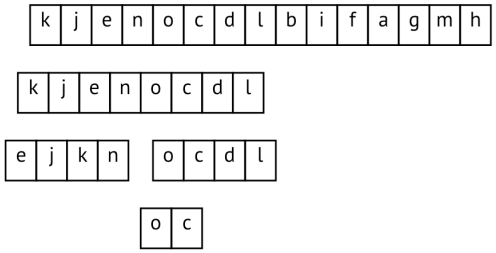
Merge-Sort: Beispiel



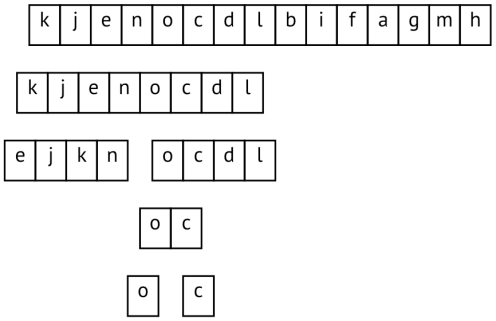
Merge-Sort: Beispiel



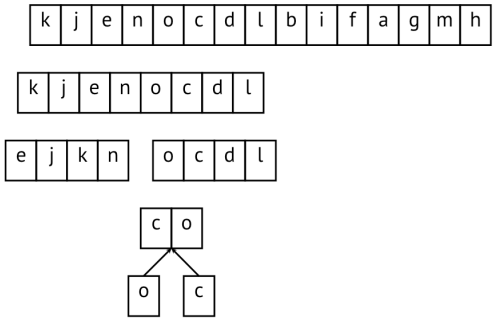
Merge-Sort: Beispiel



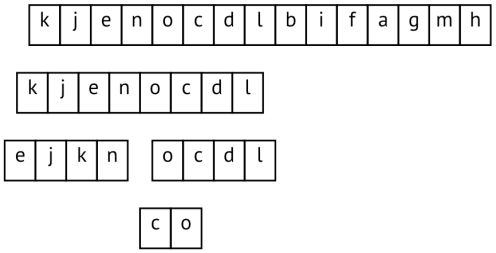
Merge-Sort: Beispiel



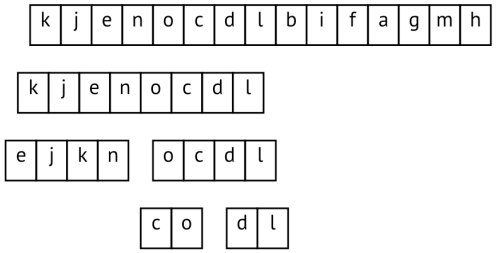
Merge-Sort: Beispiel



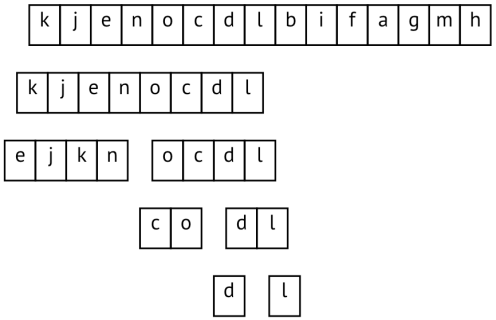
Merge-Sort: Beispiel



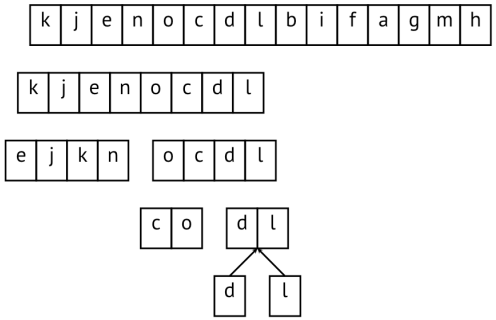
Merge-Sort: Beispiel



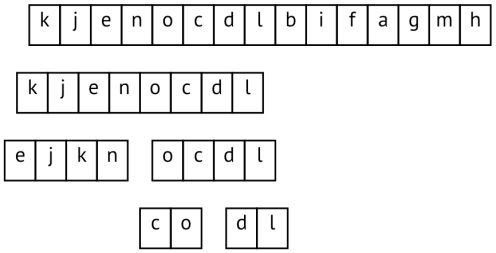
Merge-Sort: Beispiel



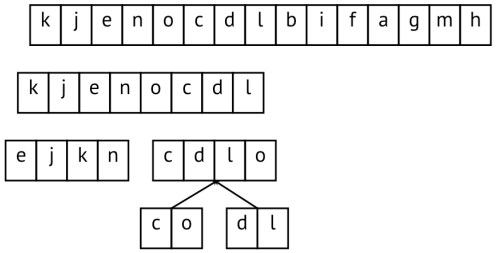
Merge-Sort: Beispiel



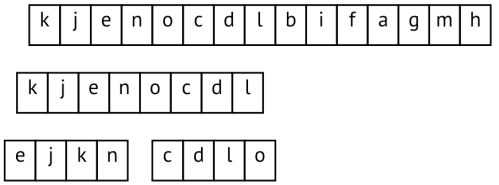
Merge-Sort: Beispiel



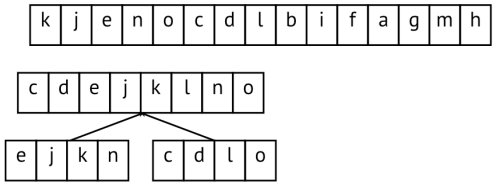
Merge-Sort: Beispiel



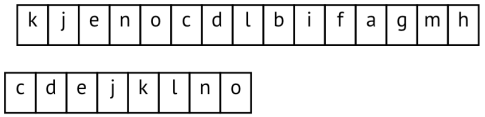
Merge-Sort: Beispiel



Merge-Sort: Beispiel



Merge-Sort: Beispiel



usw.

Merge-Sort (rekursiv)

Es entstehen immer sortierte Teillisten in Form von „Diagonalen“.

Merge-Sort: Aufwand

- Das Mischen zweier Folgen der Länge L_1 und L_2 erfordert höchstens L_1+L_2 Vergleiche und genau $2\times(L_1+L_2)$ Kopier-operationen (i++ in jedem Schleifendurchlauf)
- Summe aller Folgenlängen auf jeder Rekursionsstufe = n
- Anzahl der Rekursionsstufen = log(n)
- Best = Worst = Average Case = $O(n\times\log n)$
- Aber: Doppelter Speicherbedarf !

Am besten wäre es, wenn der Algorithmus mit nur einem Array anstatt zwei auskommen würde. Besser: Iterative Implementierung.

Merge-Sort (iterativ)

- Die Zerlegung verändert die Folge nicht.
- Die top-down Rekursion steuert nur die Reihenfolge beim Mischen.
- Fasse die unsortierte Liste als Folge von sortierten einelementigen Folgen auf.
- Mische die Teilfolgen bottom-up

Merge-Sort (iterativ)

- MergeSort(A[1..n])

```
k ← 1
while k < n do
    i ← 1
    while i + k − 1 < n do
        l ← i
        m ← i + k − 1
        r ← Min(n, i + 2*k − 1)
        Merge(A[ l..m,m+1..r] )
        i ← i + 2*k
    k ← 2*k
```


Nehme an, die gesamte Liste besteht aus n Teillisten der Länge 1. Sortiere Teillisten von immer größer werdender Länge. 1, 2, 4, 8, usw.

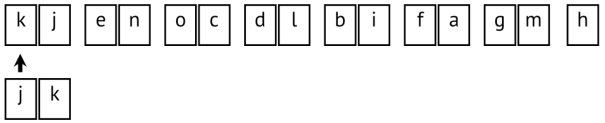
Merge-Sort (iterativ): Beispiel

k	j	e	n	o	c	d	l	b	i	f	a	g	m	h

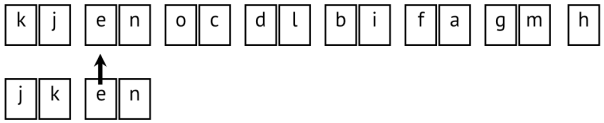
Merge-Sort (iterativ): Beispiel

k	j	e	n	o	c	d	l	b	i	f	a	g	m	h

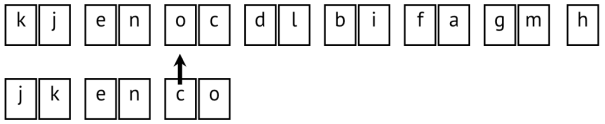
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



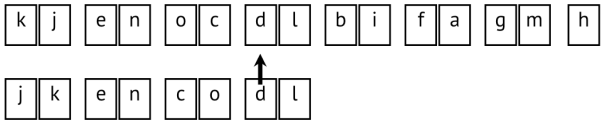
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



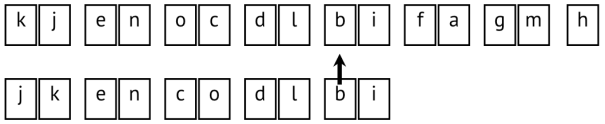
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



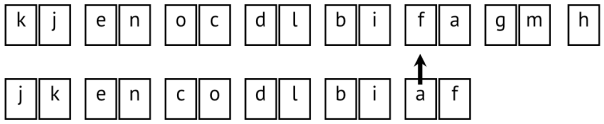
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



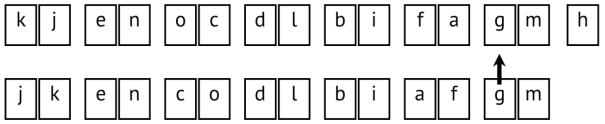
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



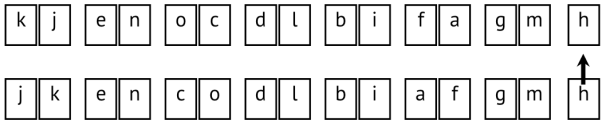
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



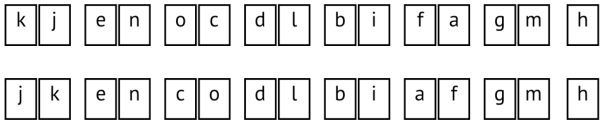
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



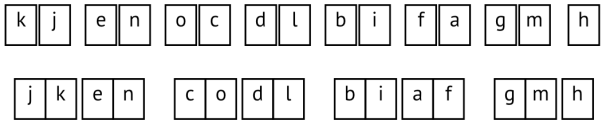
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



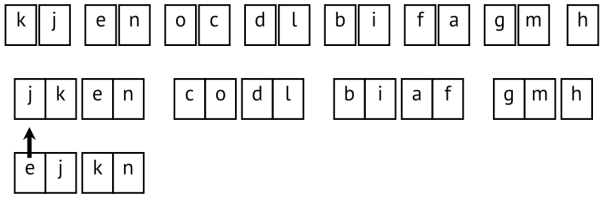
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



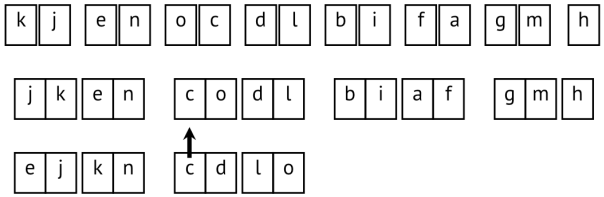
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



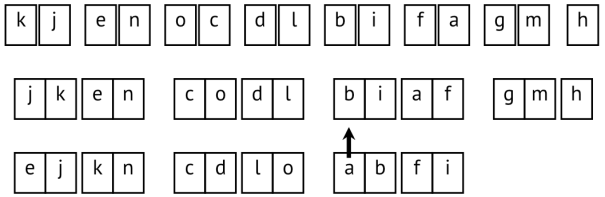
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



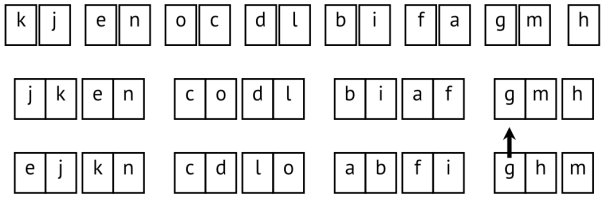
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



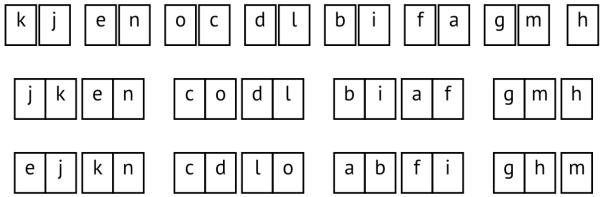
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



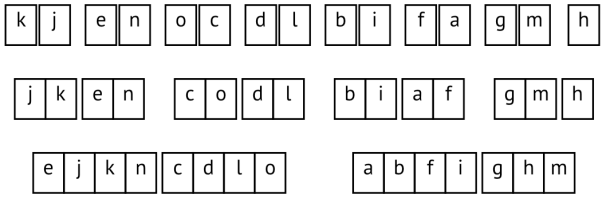
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



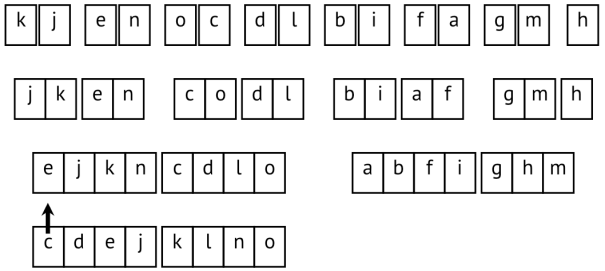
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



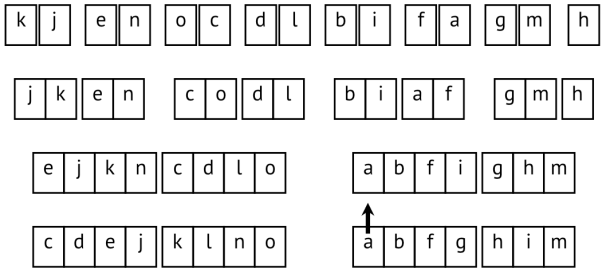
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



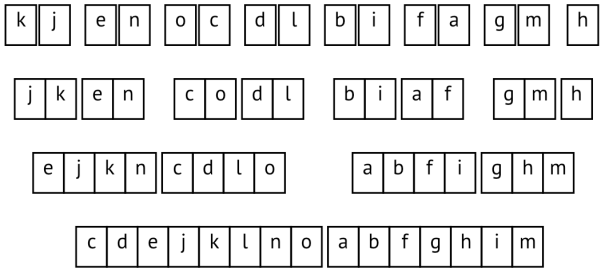
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



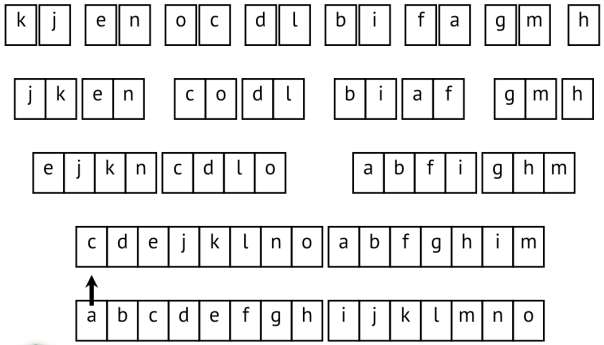
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



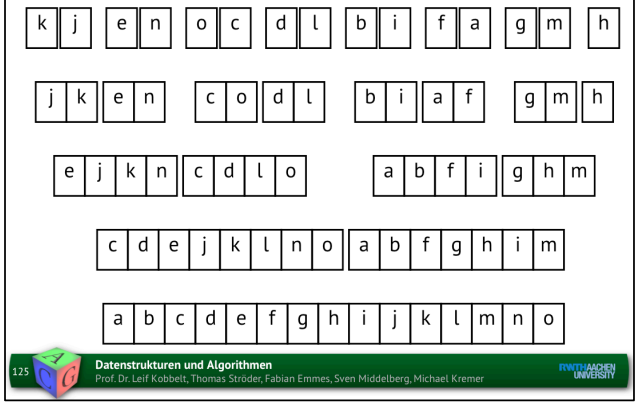
Merge-Sort (iterativ): Beispiel



Merge-Sort (iterativ): Beispiel



Merge-Sort (iterativ): Beispiel



Merge-Sort (iterativ)

Der Algorithmus spart sich die Rekursion und fängt direkt in der tiefsten Ebene an. Es findet eine Breiten- anstatt einer Tiefensuche (wie im rekursiven Ansatz) statt.

Heap-Sort

- Idee
  - Bei Selection-Sort entsteht der $O(n^2)$-Aufwand durch die lineare Suche nach dem kleinsten (oder größten) Element in der Rest-Liste.
  - Mit einer Prioritätsschlange (Heap) kann man das kleinste Element schneller finden ($O(\log n)$-Aufwand zum Wiederherstellen der Heap-Bedingung).

Heap-Definition (reprise)

- (Links-)vollständiger Binärbaum in Array-Darstellung
  - Vaterknoten A[i] hat die Nachfolger A[2×i] und A[2×i+1]
- Heap-Bedingung
  - Node ⩾ max(Left-Subtree) und Node ⩾ max(Right-Subtree)
  - $A[i] \geqslant A[2\times i]$ und $A[i] \geqslant A[2\times i+1]$

Heap-Definition (reprise)

- (Links-)vollständiger Binärbaum in Array-Darstellung
  - Vaterknoten A[i] hat die Nachfolger A[2×i] und A[2×i+1]
- Heap-Bedingung
  - Node ⩾ max(Left-Subtree) und Node ⩾ max(Right-Subtree)
  - $A[\lfloor i/2 \rfloor] \geqslant A[\, i \,]$

Heap-Definition (reprise)

- Ein Array A hat die Heap-Eigenschaft ab Index p, wenn $A[\lfloor i/2 \rfloor] \geqslant A[\, i \,]$ ab Index 2×p gilt (weil dann $\lfloor i/2 \rfloor = p$).
- Insbesondere: jedes beliebige Array A[1..n] hat die Heap-Eigenschaft ab Index $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.

In der zweiten Hälfte des Arrays sind nur Blattknoten, für die die Bedingung egal ist.

Heap-Sort

- Konvertiere ein beliebiges Array in einen Heap ($A[\lfloor i/2 \rfloor] \geqslant A[\, i \,]$).
- Entferne sukzessive das Top-Element und stelle die Heap-Eigenschaft wieder her (vgl. Deq()-Operation für Prioritäts-schlangen in Abschnitt 1.4).
- Heap liefert sortierte Elemente.

Heap-Sort

- Sei $A[1..n]$ ein Heap,Top-Element $A[1]$
- Nach dem Entfernen des Top-Elementes wird $A[n]$ nach $A[1]$ kopiert und durch „Versickern“ die Heap-Eigenschaft wieder hergestellt.
- Danach benutzt der Heap noch die Array-Elemente $A[1..n-1]$.
- $A[n]$ ist also frei und das entfernte Top-Element kann dort abgelegt werden.

Bei dieser Implementierung wird kein zusätzlicher Speicher gebraucht, da die sortierten Elemente jeweils ans Ende des Arrays geschrieben werden.

Heap-Sort: Algorithmus

- ConvertToHeap(A[1..n])
  for i = $\lfloor n/2 \rfloor$ downto 1 do
    Sink(A[1..n],i)

- Wenn die Schleife bis i=p durchgelaufen ist, hat das Array A ab Index p die Heap-Eigenschaft.

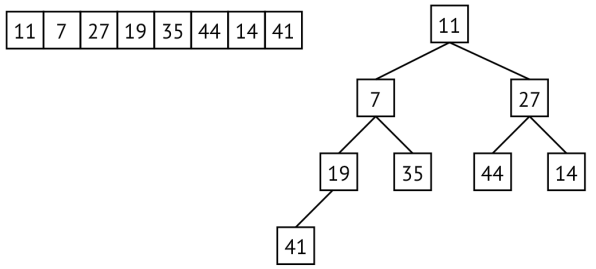
Heap-Sort: Algorithmus

- Sink(A[1..n],i)
  while i $\leq \lfloor n/2 \rfloor$ do
    j ← 2*i
    if j < n and A[j+1] > A[j] then
      j ← j+1
    if A[j] > A[i] then
      Swap(A[j],A[i])
      i ← j
    else
      i ← n

Heap-Sort: Algorithmus

- HeapSort(A[1..n])
  ConvertToHeap(A[1..n])
  for i ← n downto 1 do
    Swap(A[1],A[i])
    Sink(A[1..i−1],1)

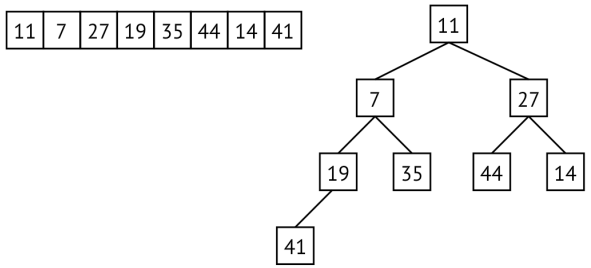
Heap-Sort: Beispiel



Im Prinzip ist Heap-Sort eine intelligente Variante des Selection-Sort. Man wählt immer das größte/kleinste Element der unsortierten Teilliste und hängt es an die entsprechende Stelle im sortierten
Teil der Liste.

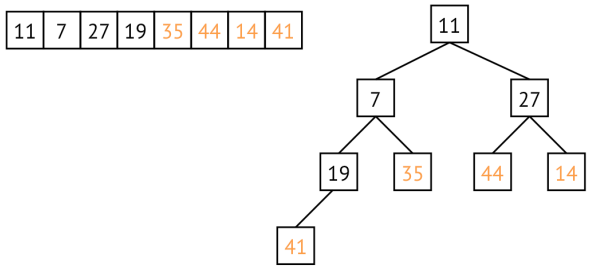
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



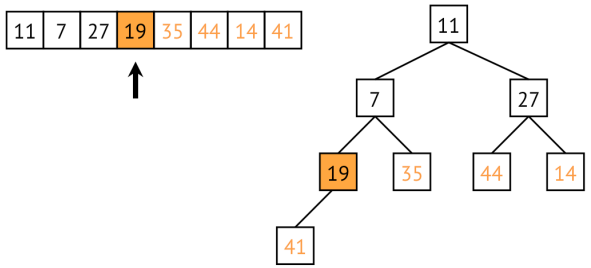
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



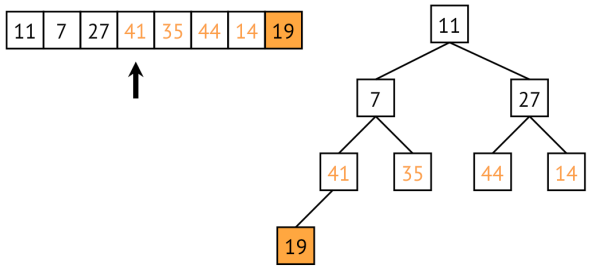
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



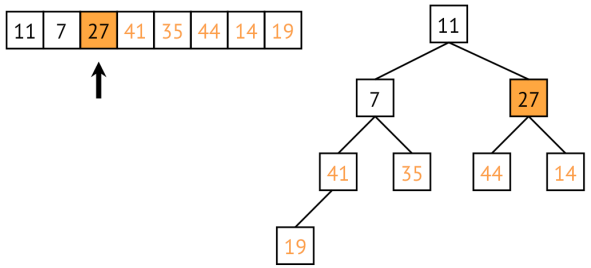
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



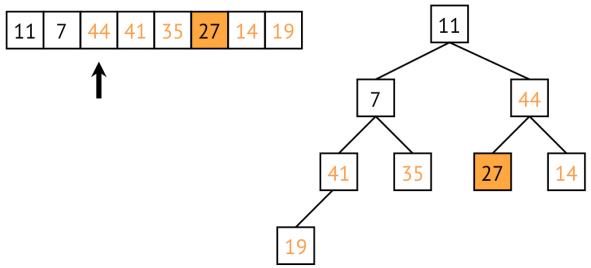
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



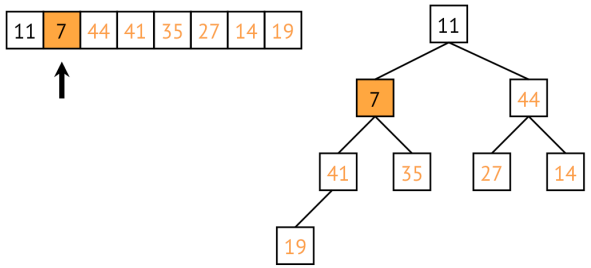
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



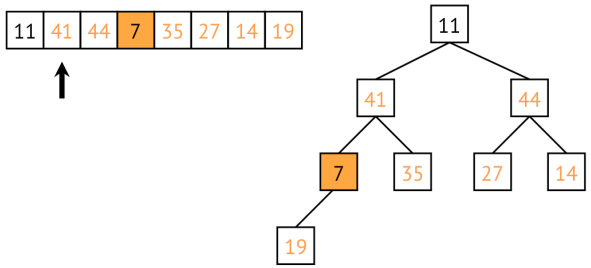
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



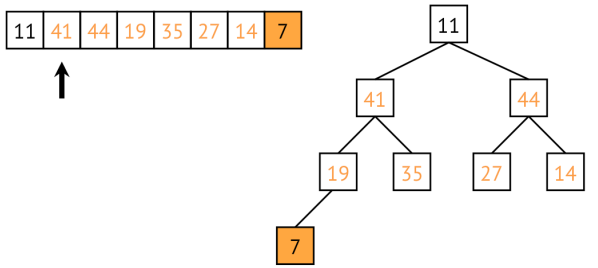
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



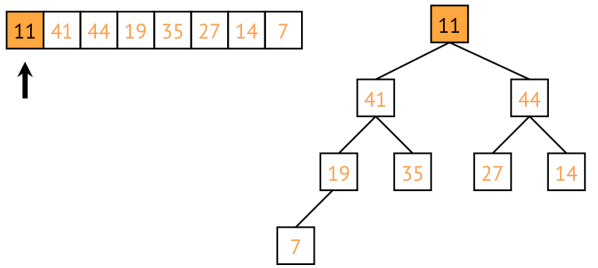
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



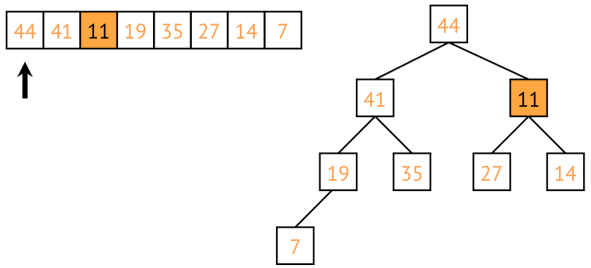
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



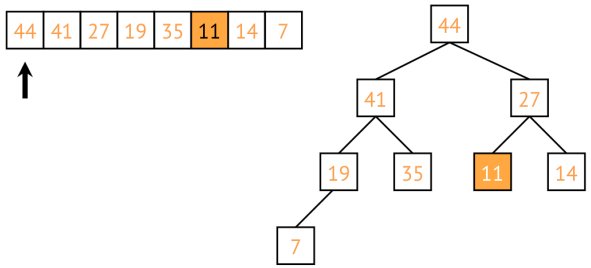
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



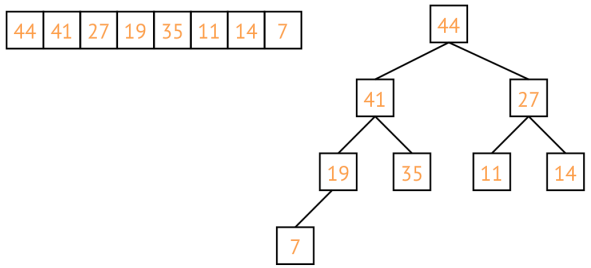
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



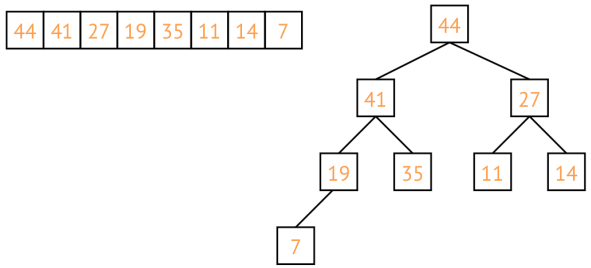
Heap-Sort: Beispiel

Phase I: Aufbau des Heaps



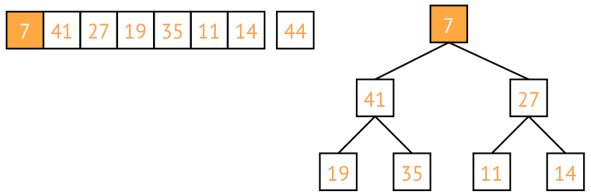
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



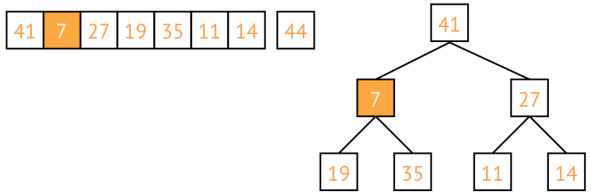
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



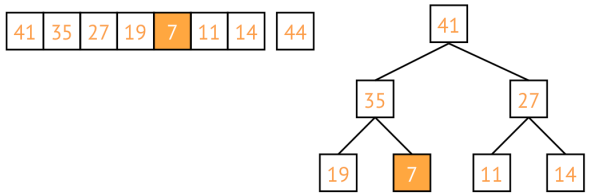
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



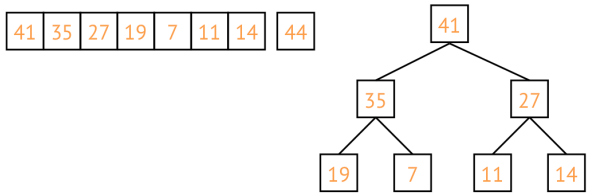
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



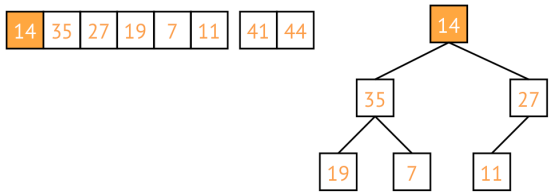
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



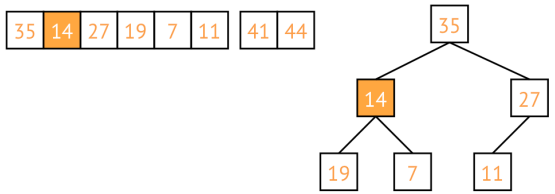
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



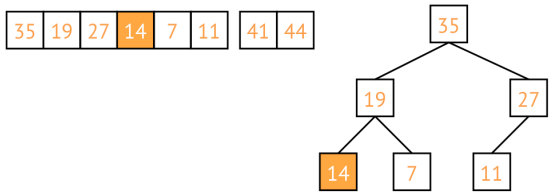
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



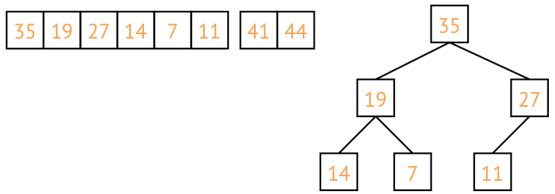
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



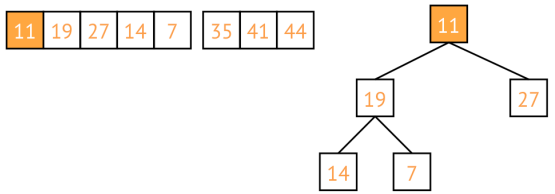
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



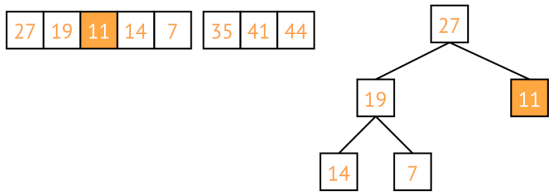
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



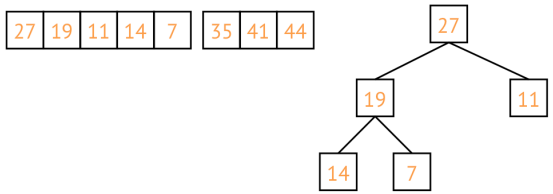
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



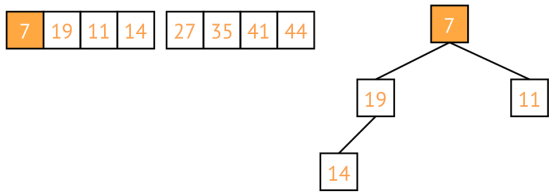
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



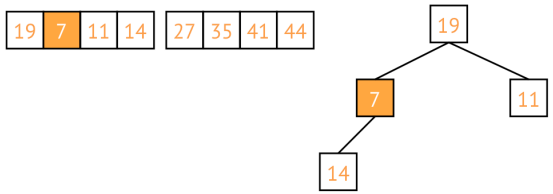
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



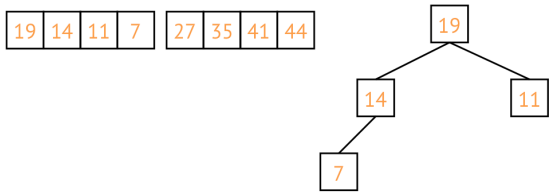
Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



Heap-Sort: Beispiel

Phase II: Selection-Sort



Heap-Sort: Beispiel

Heap-Sort: Aufwand

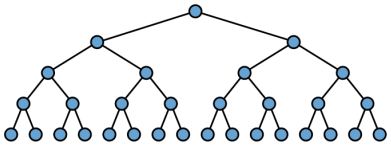
- Aufwand
  - Aufwand zum Aufbau des Heaps
  - Aufwand Selection-Sort

Der Algorithmus hat zwei Phasen: Aufbau und Abbau (sortieren). Bei der Komplexitätsanalyse müssen natürlich beide Teile berücksichtigt werden.

Aufwand: ConvertToHeap()

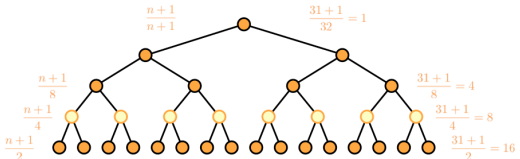
- ConvertToHeap()
  - Sink()-Operation = O(Höhe des Heap)
  - Sei $n = 2^k - 1$...

n = 31, k = 5



Aufwand: ConvertToHeap()

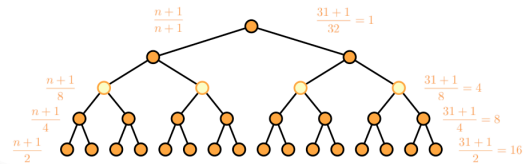
$$\begin{aligned} T_1(n) &= c\left(1\tfrac{n+1}{4} + 2\tfrac{n+1}{8} + \cdots + (\log(n+1)-1)\,\tfrac{n+1}{n+1}\right) \\ &= c\left(1\tfrac{n+1}{4} + \cdots + i\tfrac{n+1}{2^{i+1}} + \cdots + (k-1)\tfrac{n+1}{2^k}\right) \\ &= \tfrac{c}{2}(n+1)\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\tfrac{i}{2^i} \end{aligned}$$



Für die Blätter müssen wir nichts machen. Für die nächsten (n+1)/4 muss man maximal eine Sink()-Operation ausführen. Danach zwei, usw. Für jedes Element (bis auf die Blätter) muss
man maximal log n Operationen ausführen.

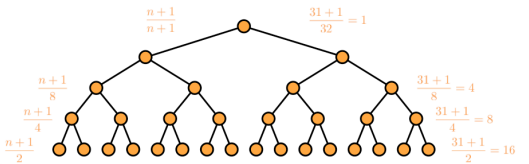
Aufwand: ConvertToHeap()

$$\begin{aligned} T_1(n) &= c\left(1\tfrac{n+1}{4} + 2\tfrac{n+1}{8} + \cdots + (\log(n+1)-1)\tfrac{n+1}{n+1}\right) \\ &= c\left(1\tfrac{n+1}{4} + \cdots + i\tfrac{n+1}{2^{i+1}} + \cdots + (k-1)\tfrac{n+1}{2^k}\right) \\ &= \tfrac{c}{2}(n+1)\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} \tfrac{i}{2^i} \end{aligned}$$



Aufwand: ConvertToHeap()

$$\begin{aligned} T_1(n) &= c\left(1\tfrac{n+1}{4} + 2\tfrac{n+1}{8} + \cdots + (\log(n+1)-1)\tfrac{n+1}{n+1}\right) \\ &= c\left(1\tfrac{n+1}{4} + \cdots + i\tfrac{n+1}{2^{i+1}} + \cdots + (k-1)\tfrac{n+1}{2^k}\right) \\ &= \tfrac{c}{2}(n+1)\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} \tfrac{i}{2^i} \end{aligned}$$



Aufwand: ConvertToHeap()

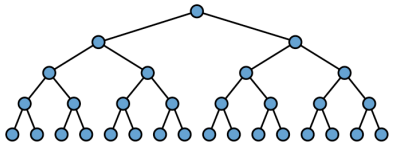
$$
\begin{aligned}
T_1(n) &\leq \tfrac{c}{2}(n+1)\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{2^i} \\
&= \tfrac{c}{2}(n+1)\underbrace{\left(2-\frac{k+1}{2^{k-1}}\right)}_{<2} \\
&= O(n)
\end{aligned}
$$

„Für viele Elemente passiert wenig und für wenige Elemente passiert viel“. Aufbauen des Heaps in O(n).

Aufwand: Selection-Sort

- Selection-Sort
  - Kosten für die Wiederherstellung der Heap-Eigenschaft = O(Höhe des restlichen Heaps)
  - Sei $n = 2^k - 1$...

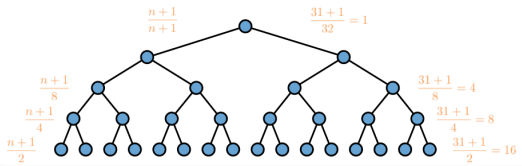
n = 31, k = 5



Wiederherstellen der Heap-Eigenschaft geschieht allerdings in O(log n). Von daher ist die Gesamtkomplexität des Heap-Sort-Algorithmus O(n * log n).

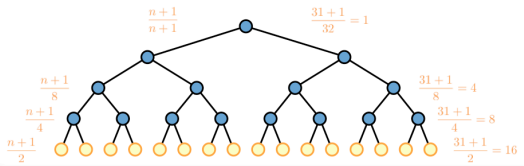
Aufwand: Selection-Sort

- Selection-Sort
  - Kosten für die Wiederherstellung der Heap-Eigenschaft = O(Höhe des restlichen Heaps)
  - Sei $n = 2^k - 1$...



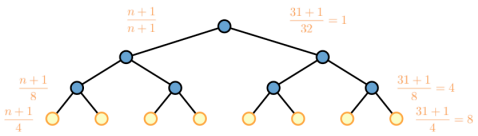
Aufwand: Selection-Sort

- Selection-Sort
  - Kosten für die Wiederherstellung der Heap-Eigenschaft = O(Höhe des restlichen Heaps)
  - Sei $n = 2^k - 1$...



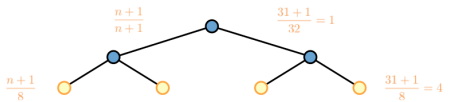
Aufwand: Selection-Sort

- Selection-Sort
  - Kosten für die Wiederherstellung der Heap-Eigenschaft = O(Höhe des restlichen Heaps)
  - Sei $n = 2^k - 1$...



Aufwand: Selection-Sort

- Selection-Sort
  - Kosten für die Wiederherstellung der Heap-Eigenschaft = O(Höhe des restlichen Heaps)
  - Sei $n = 2^k - 1$...



Aufwand: SelectionSort

$$
\begin{aligned}
T_2(n) &\leq c\left((k-1)\tfrac{n+1}{2} + (k-2)\tfrac{n+1}{4} + \cdots + 0\tfrac{n+1}{n+1}\right) \\
&= c\left((k-1)\tfrac{n+1}{2} + \cdots + (k-i)\tfrac{n+1}{2^i} + \cdots\right) \\
&= c(n+1)\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)2^{-i} \\
&= c(n+1)\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} i2^{i-k} \\
&= c(n+1)\tfrac{1}{2^k}\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} i2^{i} \\
&= c(n+1)\tfrac{1}{2^k}\left(2^k(k-2)+2\right) \\
&= c(n+1)(k-2+\tfrac{1}{2^{k-1}}) \\
&= O(n\log n)
\end{aligned}
$$

k ist die Höhe des Binärbaumes, also k = log n.

Aufwandsabschätzung

- Insgesamt … worst / average case

  $T(n) = T_1(n) + T_2(n)$
  $= O(n) + O(n \times \log n)$
  $= O(n \times \log n)$

- Best case: $O(n)$ … alle Elemente gleich
- Vorsortierung wird nicht ausgenutzt

Best-Case: Es gibt kein Versinken, weil Heap-Eigenschaft immer erfüllt ist.

Vergleich

	Average	Worst
Quick-Sort	$O(n \times \log n)$	$O(n^2)$
Merge-Sort (doppelter Speicher)	$O(n \times \log n)$	$O(n \times \log n)$
Heap-Sort	$O(n \times \log n)$	$O(n \times \log n)$